Thema der Stunde

Varianzanalyse (ANOVA)

1. Apriori und aposteriori Kontraste
2. Fixed und random factor Modelle
3. Einzelvergleiche in der 2 faktoriellen ANOVA

A-Priori Kontraste

Prüfung des Mittelwerteunterschieds von Faktorstufen bzw. Kombinationen von Faktorstufen:

	A1	A2	A3
Fall	0PM	05PM	1PM
1	17	11	8
2	20	11	16
3	16	13	12
4	16	14	13
5	18	13	14
6	21	20	7
7	23	19	8
8	24	18	7
9	20	16	5
10	23	22	1
Summe	198	157	91
Mittel	19.80	15.70	9.10
Var	7.96	13.61	18.89

z.B.:

$$\Delta \bar{x}_{1-2} = \bar{A}_1 - \bar{A}_2$$

oder

$$\Delta \bar{x}_{1,2-3} = \left(\frac{\bar{A}_1 + \bar{A}_2}{2} \right) - \bar{A}_3$$

A-Priori Kontraste: t-Test

Prüfung des Mittelwerteunterschieds von Faktorstufen bzw. Kombinationen aus den *p* Faktorstufen:

$$t = \frac{\Delta\bar{x}}{\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}}} \quad mit \;\; df = p \;\; n - 1$$

Standardfehler einer Differenz von 2 Mittelwerten:

$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2_{Fehler}}{n}} \cdot \sqrt{2}$$

Ein t-Test in der ANOVA hat bei p > 2 mehr Freiheitsgrade als ein einfacher paarweiser Test und ist daher trennschärfer. Der Standardfehler bestimmt sich aus der Fehlervarianz, die ja die gepoolte Varianz aus allen Stichproben ist.

A-Priori Kontraste: F-Test

t- Test und F-Test sind wegen der Beziehung

$$t_{df}^{2} = F_{1,df}$$

äquivalent. (Die quadrierte t- Verteilung mit df Freiheitsgraden entspricht genau der F- Verteilung mit einem Zähler- und df Nennerfreiheitsgraden)

$$F = \frac{\Delta\bar{x}^{\;2}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}^{2}}$$

mit Zähler: $df = 1$

und Nenner: $df = p\;\, n-1$

ist äquivalente Prüfung des Mittelwerteunterschieds.

Allgemeine Form des Mittelwertevergleichs

Varianz der Mittelwertedifferenz

$$Var\ \ D = \frac{1}{n}\left(\sum_j c_j^2\right)\sigma^2_{Fehler}$$

Kontrastbedingung

$$D = \sum_j c_j \cdot \bar{x}_j$$

mit

$$\sum_j c_j = 0$$

F-Test

$$F = \frac{D^2}{Var\ \ D}$$

$$= \frac{n \cdot D^2}{\left(\sum_j c_j^2\right) \cdot \sigma^2_{Fehler}}$$

mit:

$$df_{Zähler} = 1$$

$$df_{Nenner} = df_{Fehler}$$

A-Posteriori Mittelwertevergleiche

Geläufigste: Scheffe‘ Tests

Berechnung einer kritischen Differenz für alle paarweisen Tests

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2\cdot(p-1)\cdot\sigma^2_{Fehler}\cdot F_{df_A, df_{Fehler}, 1-\alpha}}{n}}$$

Der kritische F-Wert hat also

$$df_{Zähler} = p-1$$

$$df_{Nenner} = df_{Fehler}$$

Ist also irgendeine Mittelwertedifferenz größer als $Diff_{crit}$, so ist sie signifikant.

Fixed und random factor Modelle

Fixed Factor Modell:
Alle im Experiment realisierten Stufen eines Faktores beschreiben die unabhängige Variable vollständig (kategorial geschlossen). (Geschlecht, Parteizugehörigkeit etc.)
→ Das Experiment gibt die Wirkung des Faktors über alle möglichen Realisierungen von ihm an.

Random Factor Modell:
Alle im Experiment realisierten Stufen eines Faktors stellen nur eine willkürliche Auswahl aus vielen anderen möglichen dar (Dosis eines Medikamentes, Umgebungseinflüsse etc.).
→ Das Experiment liefert nur eine Probe aus dem gesamten Wirkspektrums des Faktors.

Fixed und random factor Modelle

Praktische Konsequenz:

Die Effekte der Faktoren müssen an jeweils anderen Prüfvarianzen getestet werden, je nachdem, ob sie fixed oder random sind. Dasselbe gilt für die Einzelvergleiche innerhalb von fixed oder random factors.

zu prüfende Varianz	Prüfvarianzen I A fixed B fixed	II A fixed B random	III A random B random
$\widehat{\sigma}^2_A$	$\widehat{\sigma}^2_{Fehler}$	$\widehat{\sigma}^2_{A\times B}$	$\widehat{\sigma}^2_{A\times B}$
$\widehat{\sigma}^2_B$	$\widehat{\sigma}^2_{Fehler}$	$\widehat{\sigma}^2_{Fehler}$	$\widehat{\sigma}^2_{A\times B}$
$\widehat{\sigma}^2_{A\times B}$	$\widehat{\sigma}^2_{Fehler}$	$\widehat{\sigma}^2_{Fehler}$	$\widehat{\sigma}^2_{Fehler}$

Einzelvergleiche: 2 faktorielle ANOVA

Faktor

F- Test

A

$$\hat{\sigma}^2_{D\ A} = \frac{n \cdot q \cdot \left(\sum_i c_i \cdot \bar{A}_i \right)^2}{\sum_i c_i^2}$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2_{D\ A}}{\hat{\sigma}^2_{test}}$$

B

$$\hat{\sigma}^2_{D\ B} = \frac{n \cdot p \cdot \left(\sum_j c_j \cdot \bar{B}_j \right)^2}{\sum_j c_j^2}$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}^2_{D\ B}}{\hat{\sigma}^2_{test}}$$

Hierin ist die Testvarianz in der Prüfvarianztabelle gegeben.

Einzelvergleiche: Scheffe‘ Tests

Faktor

A

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p-1) \cdot \hat{\sigma}^2_{test} \cdot F_{df_A, df_{test}, 1-\alpha}}{n \cdot q}}$$

B

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2 \cdot (q-1) \cdot \hat{\sigma}^2_{test} \cdot F_{df_B, df_{test}, 1-\alpha}}{n \cdot p}}$$

Zellen

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p \cdot q-1) \cdot \hat{\sigma}^2_{Fehler} \cdot F_{p \cdot q-1, p \cdot q \cdot (n-1), 1-\alpha}}{n}}$$

Testvarianz ist wieder in der Prüfvarianztabelle gegeben.

Bedingte Einzelvergleiche

Vergleich von Zellmittelwerten unter A für eine feste Stufe des anderen Hauptfaktors B

$$QS_{i\ j} = \frac{n \cdot \left(\sum_i c_{i\ j} \cdot \overline{AB}_{ij} \right)^2}{\sum_i c_i^2} \qquad df = 1$$

$$\sigma^2_{i\ j} = \frac{QS_{i\ j}}{df} = QS_{i\ j} \qquad F = \frac{\sigma^2_{i\ j}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler}} = \frac{QS_{i\ j}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler}}$$

Der F- Wert ist signifikant, wenn er größer als der folgende S- Wert ist:

$$S_{i\ j} = \left[\ p-1 + \ p-1 \ \ q-1\ \right] \cdot F_{df_A + df_{A\times B}, df_{Fehler}, 1-\alpha}$$

Bedingte Einzelvergleiche

Vergleich von Zellmittelwerten unter B für eine feste Stufe des anderen Hauptfaktors A

$$QS_{j\;i} = \frac{n \cdot \left(\sum_j c_{j\;i} \cdot \overline{AB}_{ij} \right)^2}{\sum_j c_j^2} \qquad df = 1$$

$$\sigma^2_{j\;i} = \frac{QS_{j\;i}}{df} = QS_{j\;i} \qquad F = \frac{\sigma^2_{j\;i}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler}} = \frac{QS_{j\;i}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler}}$$

Der F- Wert ist signifikant, wenn er größer als der folgende S- Wert ist:

$$S_{j\;i} = \left[\; q-1 + \;p-1\;\; q-1 \;\right] \cdot F_{df_B + df_{A\times B}, df_{Fehler}, 1-\alpha}$$

Voraussetzungen

1. Normalverteilung der Fehlerkomponenten
   (gilt als erfüllt, wenn die Zellresiduen normalverteilt sind)

2. Unabhängigkeit von Treatmenteffekten und Messfehlern
   (Zellmittelwerte und Varianzen sollten unkorreliert sein)

3. Varianzhomogenität der Fehlervarianzen aller Zellen
   (Prüfung mit speziellen Tests: Bartlett / Levene /Fmax)

[Statistica]

Bartlett-Test

Prüft die Annahme der Varianzhomogenität

(Variation innerhalb der Stichproben muss für alle Stichproben gleich sein)

$$\chi^2 = \frac{2.303}{C} \cdot \left(\left(\sum_i n_i - p \right) \cdot \log_{10} \; \hat{\sigma}^2_{Fehler} \; - \sum_i \; n_i - 1 \; \cdot \log_{10} \; \hat{\sigma}^2_{Fehler(i)} \; \right)$$

$$df = p - 1$$

$$C = 1 + \frac{1}{3 \cdot \; p - 1} \cdot \left(\sum_i \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_i \; n_i - 1} \right)$$

Es sollte α = 0.25 gewählt werden, da man an der Beibehaltung der H0 interessiert ist.

Der Test ist nur reliabel für normalverteilte Daten.

Bartlett-Test (zweifaktoriell)

Prüft die Annahme der Varianzhomogenität

(Variation innerhalb der Stichproben muss für alle Stichproben gleich sein)

$$\chi^2 = \frac{2.303}{C} \cdot \left(\left(\sum_j \sum_i n_{ij} - 1 \right) \cdot \log_{10} \hat{\sigma}^2_{Fehler} - \sum_j \sum_i n_{ij} - 1 \cdot \log_{10} \hat{\sigma}^2_{Fehler(ij)} \right)$$

$$df = pq - 1$$

$$C = 1 + \frac{1}{3 \cdot pq - 1} \cdot \left(\sum_j \sum_i \frac{1}{n_{ij} - 1} - \frac{1}{\sum_j \sum_i n_{ij} - 1} \right)$$

Es sollte $\alpha = 0.25$ gewählt werden, da man an der Beibehaltung der H0 interessiert ist.

Der Test ist nur reliabel für normalverteilte Daten.

F_{max} -Test

Prüft die Annahme der Varianzhomogenität

(Variation innerhalb der Stichproben muss für alle Stichproben gleich sein)

$$F_{\max} = \frac{\hat{\sigma}^2_{Fehler(\max)}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler(\min)}}$$

Die Verteilung von F_{max} hängt von der Anzahl der Treatmentstufen p und den Freiheitsgraden (n-1) einer einzelnen Fehlervarianz ab.

F_{max} ist in einer gesonderten Tabelle austabelliert.

Der test ist gröber als der Bartlett - Test, aber unempfindlich gegen Verletzungen der Normalverteilungsannahme.