

# Forschungsstatistik II

*Prof. Dr. G. Meinhardt*

*SS 2005*

*Fachbereich Sozialwissenschaften, Psychologisches Institut*

*Johannes Gutenberg Universität Mainz*

# Thema der Stunde

---

## Varianzanalyse mit Messwiederholung

1. Aufbau und Quadratsummenzerlegung
2. Veranschaulichung an der einfaktoriellen rmANOVA (repeated measurements ANOVA)

# rm ANOVA

---

## Eigenschaften:

- In einer rmANOVA wird jede Faktorstufe des rm Faktors an denselben VPn untersucht

## Vorteile:

- a) Fehlervarianz wird in der Regel kleiner und Effekte sind schärfer testbar
- b) Homogenität der Personenstichprobe ist nicht wichtig

## Nachteile:

- a) Ausfälle von Personen wirken sich auf alle Faktorstufen aus
- b) Anspruchsvolle Voraussetzung der Homogenität der Korrelationen aller Stichproben.



*In der Regel das wünschenswerte Design, da die Effekte in der Variation innerhalb derselben Personen aufgedeckt werden, die auf das Treatment zurückgeführt werden können.*

# Variationsschema

Prüfung des Mittelwerteunterschieds von Faktorstufen, die sich in Effekten innerhalb jeder Zeile bemerkbar macht.

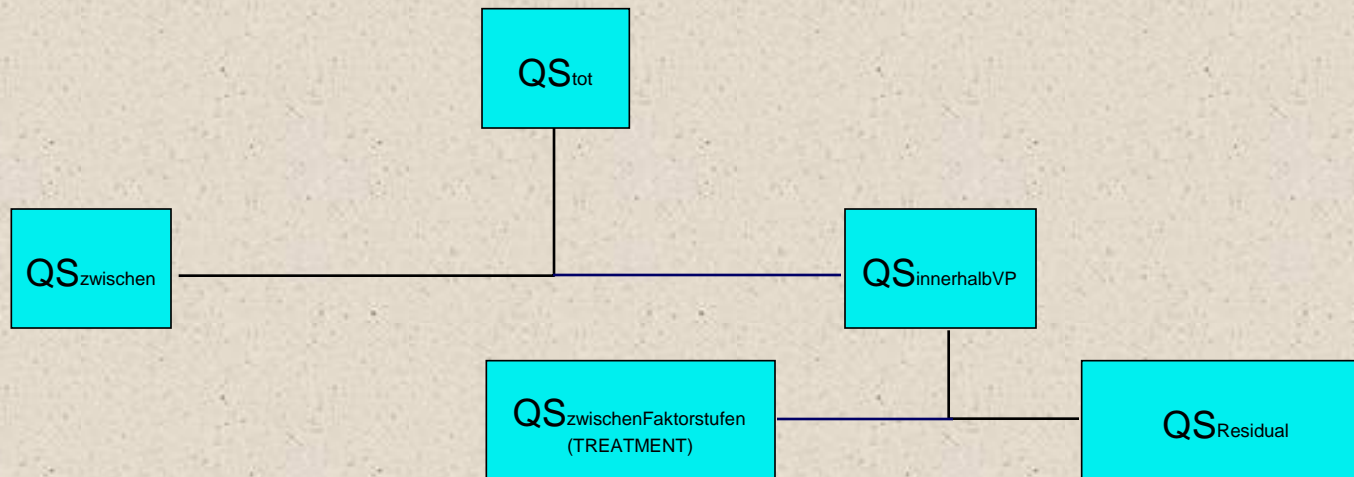
	A1	A2	A3	Person	
Fall	0PM	05PM	1PM	Summe	Mittel
1	17	11	8	36	12.00
2	20	11	16	47	15.67
3	16	13	12	41	13.67
4	16	14	13	43	14.33
5	18	13	14	45	15.00
6	21	20	7	48	16.00
7	23	19	8	50	16.67
8	24	18	7	49	16.33
9	20	16	5	41	13.67
10	23	22	1	46	15.33
Summe	198	157	91	446	
Mittel	19.8	15.7	9.1	<b>G</b>	14.87



*Abweichung vom Personmittelwert tritt als neue Information hinzu*

# Die Quadratsummenzerlegung

---



$QS_{innerhalb}$ : Enthält die Information über die Wirkung

$QS_{zwischen}$ : Enthält keine interessante Information

$QS_{Residual}$ : Enthält den Rest an intraindividuelle Variation, der nicht durch Treatment erklärt werden kann

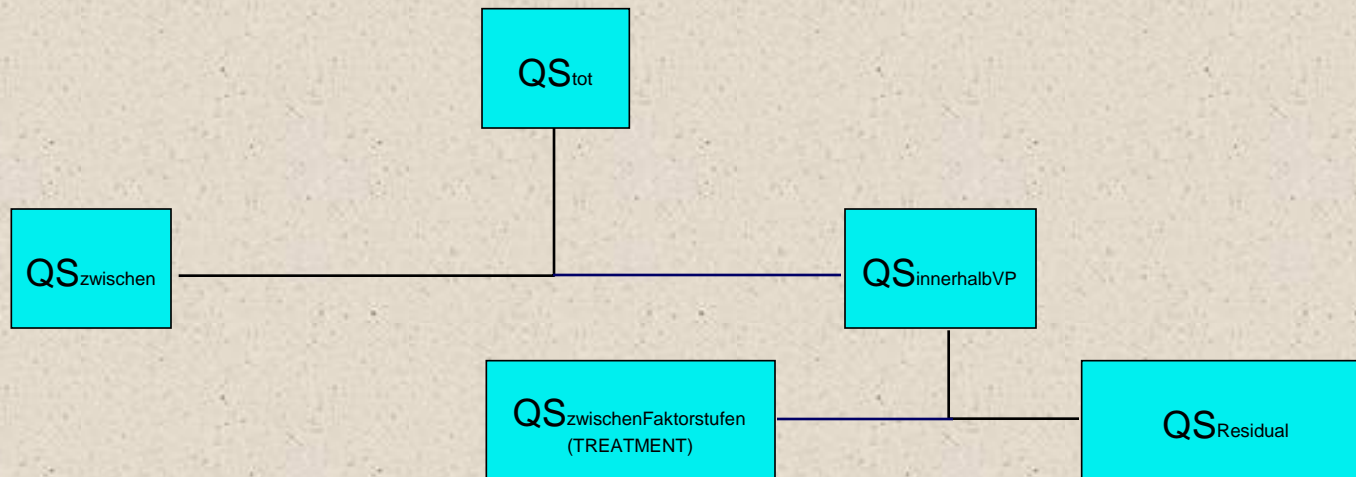


*Nur die  $QS_{innerhalb}$  enthält interessante Variation, die erklärt wird*



# Die Quadratsummenzerlegung

---



$$QS_{tot} = QS_{zwischen} + QS_{innen}$$

$$QS_{innen} = QS_{Treat} + QS_{Residual}$$

# Quadratsummen & Freiheitsgrade

---

$$df_{tot} = p \cdot n - 1$$

$$df_{zwVP} = n - 1$$

$$df_{residual} = n - 1 - p - 1$$

$$df_{inVP} = n \cdot p - 1$$

$$df_{Treat} = p - 1$$

$$QS_{tot} = \sum_i \sum_m x_{im} - \bar{G}^2$$

$$QS_{zwVP} = p \cdot \sum_m \bar{P}_m - \bar{G}^2$$

$$QS_{inVP} = \sum_i \sum_m x_{im} - \bar{P}_m^2$$

$$QS_{Treat} = n \cdot \sum_i \bar{A}_i - \bar{G}^2$$

$$QS_{residual} = \sum_i \sum_m x_{im} - \bar{A}_i - \bar{P}_m + \bar{G}^2$$

# Kennziffern & Ergebnistabelle

---

$$1 = \frac{G^2}{p \cdot n} \quad 2 = \sum_i \sum_m x_{im}^2 \quad 3 = \frac{\sum_i A_i^2}{n} \quad 4 = \frac{\sum_m P_m^2}{p}$$

QdV	QS	df	$\sigma^2 = \text{QS}/\text{df}$	F
zwischen VP	(4) - (1)	n - 1		
Innerhalb VP	(2) - (4)	n · (p - 1)		
Treatment	(3) - (1)	p - 1		$\hat{\sigma}_{\text{treat}}^2$
Residual	(2) - (3) - (4) + (1)	(n - 1) · (p - 1)		$\hat{\sigma}_{\text{res}}^2$
Total	(2) - (1)	p · n - 1		

---



# Einzelvergleiche

---

Prinzip: Es wird an der **Residualvarianz** getestet

apriori

$$F_{D(A)} = \frac{\hat{\sigma}_{D A}^2}{\hat{\sigma}_{residual}^2} = \frac{n \cdot \left( \sum_i c_i \cdot \bar{A}_i \right)^2}{\sum_i c_i^2 \cdot \hat{\sigma}_{residual}^2}$$

Scheffe'

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2 \cdot p - 1 \cdot \hat{\sigma}_{residual}^2 \cdot F_{df_A, df_{residual}, 1-\alpha}}{n}}$$

# Beziehungen zur ANOVA (unabhängige Stichproben)

---

- 1) Verwendet man als Meßwerte die Abweichungen vom Personmittelwert (ipsative Werte), ergibt die Anova für unabhängige Stichproben über diese Werte dasselbe Resultat wie die ANOVA mit Meßwiederholung der Originalwerte.
- 2) Sind die Stichproben unkorreliert, ergibt sich dasselbe Ergebnis wie für die Anova für unabhängige Stichproben.
- 3) Sind die Stichproben hochkorreliert, ergibt sich extreme Teststärke der ANOVA. Sind die Stichproben negativ korreliert, ergibt sich schwächere Teststärke als für die Anova für unabhängige Stichproben.

[Excel-Demo]



*Die höhere Teststärke der ANOVA mit Meßwiederholung zeigt sich darin, daß in der Regel die freie Variation der Werte einer Person zu verschiedenen Zeiten kleiner ist als die freie Variation zwischen den Werten verschiedener Personen.*

# Voraussetzungen

---

- 1) Normalverteilung der Fehlerkomponenten der Personen (Personresiduen);
- 2) Varianzhomogenität und Homogenität der Korrelationen der einzelnen Stichproben



*Die Varianzhomogenität und Homogenität der Korrelationen ist eine wichtige Voraussetzung, Verletzungen führen zu progressiven Entscheidungen des F- Tests. Verletzungen der Voraussetzung können mit einem komplizierteren Verfahren, welches die Freiheitsgrade korrigiert, behoben werden (Greenhouse - Geisser).*

# Mehrfaktorielle rm ANOVA

---

- Es können ANOVA mit rm auf mehreren Faktoren und Mischmodelle von rm und grouping Faktoren verwendet werden
- Je nach Typ ergeben sich andere Dekompositionen der Quadratsumme, die auch über die Prüfvarianzen entscheiden
- Für einige Modelle mit random Factors lassen sich keine F- Quotienten mehr herleiten. Es muss dann über sog. „Quasi“ F- Brüche getestet werden.

# Beispiel

Ein grouping Faktor (A) und ein rm Faktor (B)

Datenschema

		B						
		$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_j$	$\dots$	$b_q$	
A	$a_1$	$S_1$	$S_1$	$\dots$	$S_1$	$\dots$	$S_1$	$A_1$
	$a_2$	$S_2$	$S_2$		$S_2$		$S_2$	$A_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$a_i$	$S_i$	$S_i$		$S_i$		$S_i$	$A_i$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$a_p$	$S_p$	$S_p$		$S_p$		$S_p$	$A_p$
			$B_1$	$B_2$	$\dots$	$B_j$	$\dots$	$B_q$



# Quadratsummenzerlegung

---

Residual 1

$$QS_{\text{zwischenVP}} = QS_A + QS_{\text{inS}}$$

$$QS_{\text{tot}} = QS_{\text{zwischenVP}} + QS_{\text{inVP}}$$

Residual 2

$$QS_{\text{inVP}} = QS_B + QS_{A \times B} + QS_{B \times VP}$$



*Beide Residualvarianzen fungieren als Prüfvarianzen.*

# Kennziffern & Testung

---

Sind A und B fixed factors, so gilt:

1)  $\hat{\sigma}_A^2$  wird an  $\hat{\sigma}_{inS}^2$

2)  $\hat{\sigma}_B^2$  und  $\hat{\sigma}_{A \times B}^2$  werden an  $\hat{\sigma}_{B \times VP}^2$  getestet

Kennziffern:

$$\begin{array}{lll} 1 = \frac{G^2}{p \cdot q \cdot n} & 2 = \sum_i \sum_j \sum_m x_{ijm}^2 & 3 = \frac{\sum_i A_i^2}{q \cdot n} \\ 4 = \frac{\sum_j B_j^2}{p \cdot n} & 5 = \frac{\sum_i \sum_j AB_{ij}^2}{n} & 6 = \frac{\sum_i \sum_m P_{im}^2}{q} \end{array}$$

# Ergebnistabelle

Sind A und B fixed factors, so gilt:

QdV	QS	df	$\sigma^2 = \text{QS}/\text{df}$	F
A	(3) - (1)	p - 1		$\hat{\sigma}_A^2 / \hat{\sigma}_{inS}^2$
in S	(6) - (3)	p · (n - 1)		
zwischen VP	(6) - (1)	p · n - 1		
B	(4) - (1)	q - 1		$\hat{\sigma}_B^2 / \hat{\sigma}_{B \times VP}^2$
A × B	(5) - (3) - (4) + (1)	(p - 1) · (q - 1)		$\hat{\sigma}_{A \times B}^2 / \hat{\sigma}_{B \times VP}^2$
B × VP	(2) - (5) - (6) + (3)	p · (q - 1) · (n - 1)		
Innerhalb VP	(2) - (6)	p · n · (q - 1)		
Total	(2) - (1)	n · p · q - 1		

# Regeln für Einzelvergleiche

---

- 1) Einzelvergleiche werden genauso getestet wie in der ANOVA ohne Messwiederholung. Auf den Hauptfaktoren gelten als Prüfvarianzen diejenigen, die auch für den Hauptfaktor gelten.
- 2) Für Zellvergleiche gelten die Prüfvarianzen:

a) 2 Gruppen zu einem Zeitpunkt:  $D = \overline{AB}_{ij} - \overline{AB}_{i'j'} ; \hat{\sigma}_{inZellen}^2$

$$\hat{\sigma}_{inZellen}^2 = \frac{QS_{inS} + QS_{B \times VP}}{p \cdot n - 1 + p \cdot q - 1 \cdot n - 1}$$

b) Eine Gruppe zu 2 Zeitpunkten:  $D = \overline{AB}_{ij} - \overline{AB}_{ij} ; \hat{\sigma}_{B \times VP}^2$

c) 2 Gruppen zu 2 Zeitpunkten:  $D = \overline{AB}_{ij} - \overline{AB}_{i'j'} ; \hat{\sigma}_{inZellen}^2$

# Sequenzeffekte

---

## Untersuchungsplan:

Abfolge (A)			Treatment (B)		
			1	2	3
1	2	3	$S_1$	$S_1$	$S_1$
1	3	2	$S_2$	$S_2$	$S_2$
2	1	3	$S_3$	$S_3$	$S_3$
2	3	1	$S_4$	$S_4$	$S_4$
3	1	2	$S_5$	$S_5$	$S_5$
3	2	1	$S_6$	$S_6$	$S_6$



*Testung der Sequenzen über systematisches Ausbalancieren der Folgen*



# Sequenzeffekte

---

- 1) Ist der Treatmentfaktor B signifikant, liegt eine Wirkung unabhängig von den Reihenfolgen vor (wünschenswert)
- 2) Ist Faktor A signifikant, gibt es ausgezeichnete Reihenfolgen, die bessere/schlechtere Ergebnisse über alle Treatmentstufen erzielen
- 3) Liegt eine Interaktion vor, so führen bestimmte Treatmentstufen in bestimmten Reihenfolgen zu anderen Meßwerten



*Die Sequenz-ANOVA prüft systematische Carry Over Effekte der Zeitpunkte.*