Bartlett-Test

Prüft ebenfalls die Annahme der Varianzhomogenität (exakter)

$$\chi^2 = \frac{2.303}{C} \cdot \left(\left(\sum_i n_i - 2 \right) \cdot \log_{10}\left(\hat{\sigma}^2_{pooled}\right) - \sum_i (n_i - 1) \cdot \log_{10}\left(\hat{\sigma}_i^2\right) \right)$$

$$\hat{\sigma}^2_{pooled} = \frac{SAQ_1 + SAQ_2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{n_1 \cdot s_1^2 + n_2 \cdot s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_i \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_i (n_i - 1)} \right) \qquad df = 1$$

Es sollte $\alpha = 0.25$ gewählt werden, da man an der Beibehaltung der H0 interessiert ist.

Der Test ist nur reliabel für normalverteilte Daten.

[Rechenbeispiel]

Der U - Test

Man hat ordinalskalierte Daten (Rangdaten) und testet, ob sich die Meßobjekte in 2 ***unabhängigen*** *Gruppen in ihren Rängen unterscheiden*

Beispiel: Nordd/Südd. Schüler im Schultest

Nr	Süd	Nord
1	22	13
2	47	16
3	53	27
4	35	24
5	33	11
6	2	12
7	48	18
8	7	17
9	8	40
10	34	19
11	41	31
12	49	32
13	45	
14	39	
15	23	
16	38	

Ranking

Rang Süd	Rang Nord
18	23
4	22
1	15
10	16
12	25
28	24
3	20
27	21
26	7
11	19
6	14
2	13
5	
8	
17	
9	

Haben die Nord- und Süd. Schüler verschiedene Rankings nach ihrer Leistung im Schultest ?

Der U - Test

Berechnung eines U – Wertes:

Rang Süd	Rang Nord
18	23
4	22
1	15
10	16
12	25
28	24
3	20
27	21
26	7
11	19
6	14
2	13
5	
8	
17	
9	

$T_1 = 187$ $T_2 = 219$

Rangsummen

$N_1 = 16 \qquad N_2 = 12$

Es gilt:

$$U = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_1 \cdot (N_1 + 1)}{2} - T_1$$

$$U' = N_1 \cdot N_2 + \frac{N_2 \cdot (N_2 + 1)}{2} - T_2$$

Ferner: $U + U' = N_1 \cdot N_2$

Man kann die Teststatistik alternativ über U oder U‘ berechnen.

Der U - Test

Berechnung der Prüfgrüße:

Rang Süd	Rang Nord
18	23
4	22
1	15
10	16
12	25
28	24
3	20
27	21
26	7
11	19
6	14
2	13
5	
8	
17	
9	

$T_1 = 187$ $T_2 = 219$

Rangsummen

Unter H0 gilt: $\mu_U = \frac{N_1 \cdot N_2}{2}$

mit

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{N_1 \cdot N_2 \cdot (N_1 + N_2 + 1)}{12}}$$

U bzw. U‘ sind normalverteilt:

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} \qquad -z = \frac{U' - \mu_U}{\sigma_U}$$

Prüfung in Standardnormalverteilung

[Rechenbeispiel]

Der U - Test

Bei Rangbindungen rechnet man mit einer Korrekturformel für die Streuung:

Korrigierte Streuung:

$$\sigma_{U,Korr} = \sqrt{\frac{N_1 \cdot N_2}{N \cdot (N-1)}} \cdot \sqrt{\frac{N^3 - N}{12} - \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^3 - t_i}{12}}$$

mit:

$N = N_1 + N_2$

t_i = Personen, die sich Rang i teilen (Länge der Rangbindung)

k = Anzahl der Gruppen mit Rangbindungen

[Beispiel verbundene Ränge]

Der Wilcoxon - Test

Man hat ordinalskalierte Daten (Rangdaten) und testet, ob sich die Meßobjekte in 2 ***abhängigen*** *Gruppen in ihren Rängen unterscheiden.*

Beispiel: wie t- Test abhängig

Nr	Test 1	Test 2	Δ
1	89	89	0
2	93	94	1
3	98	100	2
4	102	100	-2
5	99	102	3
6	106	110	4
7	117	112	-5
8	99	104	5
9	92	100	8
10	94	103	9

Ranking von $|\Delta|$

Unterscheiden sich die Rangsummen der Differenzen mit positivem und negativem Vorzeichen?

Der Wilcoxon - Test

Man hat ordinalskalierte Daten (Rangdaten) und testet, ob sich die Meßobjekte in 2 ***abhängigen*** *Gruppen in ihren Rängen unterscheiden.*

Fall Nr	Test1	Test2	Δ	|Δ|	Rang	+	-
1	89	89	0				
2	93	94	1	1	1	1	
3	98	100	2	2	2.5	2.5	
4	102	100	-2	2	2.5		(-) 2.5
5	99	102	3	3	4	4	
6	106	110	4	4	5	5	
7	117	112	-5	5	6.5		(-) 6.5
8	99	104	5	5	6.5	6.5	
9	92	100	8	8	8	8	
10	94	103	9	9	9	9	
						T’	T
						36	9

Prüfe Rangsummen T und T‘

T: Rangsumme für selteneres Vorzeichen

Der Wilcoxon - Test

Rang +	Rang -
1	
2.5	
	2.5
4	
5	
	6.5
6.5	
8	
9	
Rangsummen	
36	9
T'	T

$N = 10 - 1 = 9$ (Wird um Anzahl der Null-Differenzen reduziert)

Es gilt:

$$T + T' = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$$

Man kann die Teststatistik alternativ über T oder T‘ berechnen.

Der Wilcoxon - Test

Berechnung der Prüfgrüße:

Rang +	Rang -
1	
2.5	
	2.5
4	
5	
	6.5
6.5	
8	
9	
Rangsummen	
36	9
T‘	*T*

Unter H0 gilt: $\mu_T = \frac{N \cdot (N+1)}{4}$

mit

$$\sigma_{T,Korr} = \sqrt{\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2 \cdot N+1) - \sum_{i=1}^{k} \frac{t_i^3 - t_i}{2}}{24}}$$

T bzw. T‘ sind normalverteilt für *N* > 25:

$$z = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T} \qquad -z = \frac{T' - \mu_T}{\sigma_T}$$

➡ *Prüfung in Standardnormalverteilung*

[für N ≤ 25 gesonderte Tabelle (Bortz, Tab. G)]

[Rechenbeispiel]

Der Binomialtest

Man habe einen wahren Anteil *P*.

In einer Stichprobe der Größe *n* beobachte man einen Anteil:

$$p = \frac{n_A}{n}$$

Kann man aufgrund von *p* sagen, daß in der Population tatsächlich der Anteil *P* zugrunde liegt?

➡ *Man testet einfach n_A in der Binomialverteilung mit den Parametern n und P (=Binomialtest)*

[Beispiele]

Die Stichprobenverteilung von Anteilen

Man habe einen wahren Anteil *P*.

Gilt $n \cdot p \cdot q \geq 9$ so existiert für *P* das Konfidenzintervall

$$\Delta_{crit} = P \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{\sigma}_{\%}$$

mit

$$\hat{\sigma}_{\%} = \sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}$$

Es gibt die Sicherheit der Schätzung von Anteilen, abhängig von der Stichprobengröße n an (Stichprobenverteilung von Anteilen)

Die Verteilung von Anteilen ist analog der Verteilung von Mittelwerten

[Beispiele]

Stichprobenverteilung der Differenzen von Anteilen

Gilt $n_1 \cdot p_1 \cdot q_1 \geq 9$ und

$n_2 \cdot p_2 \cdot q_2 \geq 9$

so sind Differenzen von Anteilen $\Delta p = p_1 - p_2$ normalverteilt

mit $\sigma_{\Delta P} = \sqrt{\frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}}$

Man prüft die H0: $P_1 = P_2$ über die normalverteilte Prüfgröße

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sigma_{\Delta P}}$$

Die Verteilung der Differenzen von Anteilen ist analog der Verteilung der Differenzen von Mittelwerten

[Beispiele]