Methoden der
Psychologie

Prof. Dr. G. Meinhardt
6. Stock, Taubertsberg 2

R. 06-206 (Persike)
R. 06-321 (Meinhardt)

Sprechstunde jederzeit
nach Vereinbarung

Forschungsstatistik I

Dr. Malte Persike
persike@uni-mainz.de
http://psymet03.sowi.uni-mainz.de/

WS 2008/2009
Fachbereich Sozialwissenschaften
Psychologisches Institut
Johannes Gutenberg Universität Mainz

Der 1-Stichproben t-Test

Test eines Mittelwerts gegen einen Populationskennwert

Problem

Vergleichsgröße (Kennwert) → Messgröße (metrisch)

Beispiel

c

J

x

Anzahl der gefundenen Zielelemente in einem Konzentrationsleistungstest

Frage

Sind die Jungen eines Mathematikleistungskurses besser als der typische mittlere Wert für Gymnasiasten?

Stichprobe

Wir untersuchen 45 Jungen

Beispieldaten

J
$\bar{x}_J$
17.2
s_J^2
106

Alle
c
15.3

Frage

Gibt es einen Leistungsunterschied zwischen den Jungen im Mathematikleistungskurs und dem Mittel aller Gymnasiasten?

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Strategie

Ermittle die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines mittleren Wertes c unter der Annahme, dass die Stichprobe aus einer gegebenen Population stammt.

Annahme

Die Jungen kommen aus einer besseren Population.

Null-Hypothese

Alternativ-Hypothese

$$H_0 : c \geq \mu_{\bar{x}} \quad \text{(geschätzt aus } \bar{x}\text{)}$$

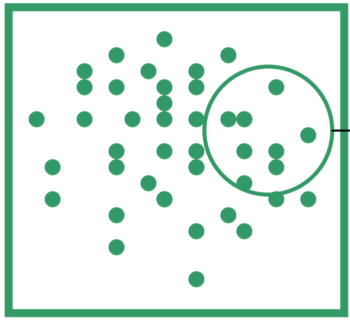
$$H_1 : c < \mu_{\bar{x}} \quad \text{(geschätzt aus } \bar{x}\text{)}$$

Urteil

Ist der beobachtete Mittelwertsunterschied unter der H_0 sehr unwahrscheinlich (höchstens 5%), so lehnen wir die H_0 ab, und sehen die H_1 als die bessere Alternative an.

Sampling

Population der Jungen



Stichprobe des Umfangs N_J

$\bar{x}_J \longrightarrow$

Mittelwertsdifferenz

$$\bar{x}_1 = 1/N \cdot \sum x$$

$$\bar{x}_2 = 1/N \cdot \sum x$$

Tue dies k - mal:

$$\bar{x}_3 = 1/N \cdot \sum x$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\bar{x}_k = 1/N \cdot \sum x$$

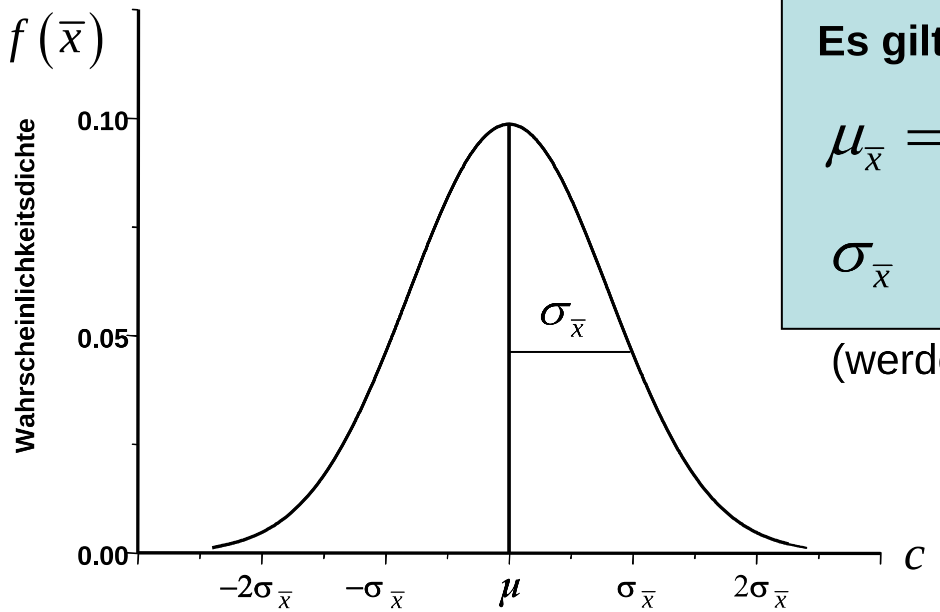
$$\left(\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \ldots \quad \bar{x}_i \quad \ldots \quad \bar{x}_k \right)$$

Verteilung der Mittelwerte

Central Limit Theorem

Inferenzstat. Schluss

Die Verteilung von Differenzen von Mittelwerten nähert sich mit wachsendem Umfang der Sample-Stichproben einer Normalverteilung. Für N > 30 ist die Approximation gut.



Es gilt:

$$\mu_{\bar{x}} = \bar{x}$$

$$\sigma_{\bar{x}}$$

(werden geschätzt)

In der theoretischen Verteilung der Mittelwerte wird die Wahrscheinlichkeitsbestimmung vorgenommen. Sie liegt dem inferenzstatistischen Schluss zugrunde.

Schätzung aus Stichprobe

Für die Populationsvarianz verwendet man eine Schätzung aus den Daten der Stichprobe:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N_J \cdot s_J^2}{N_J - 1}$$

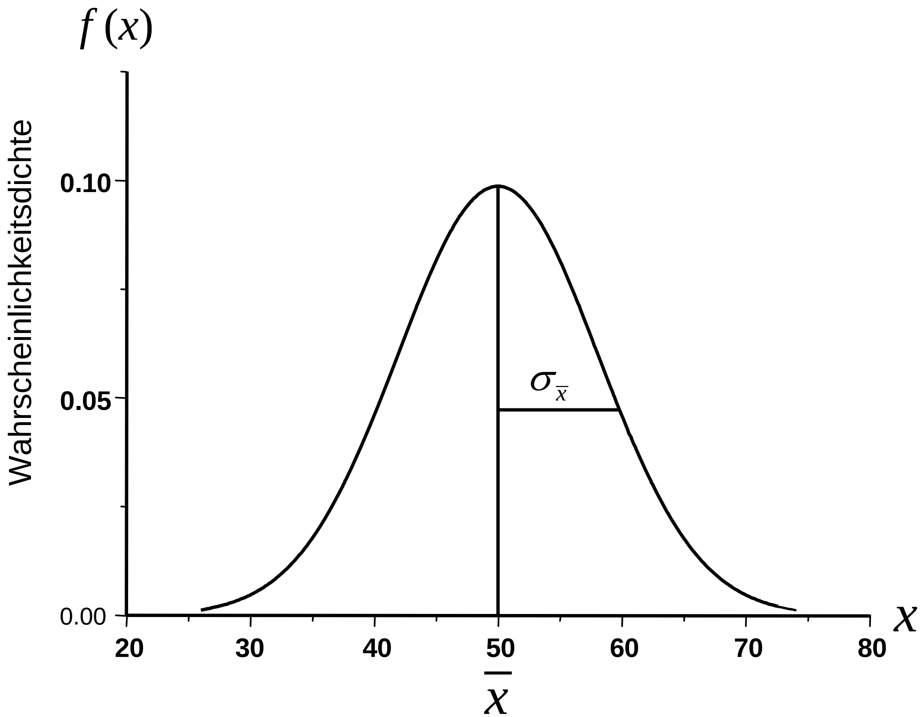
wobei s_M^2 und s_J^2 die Stichprobenvarianzen sind

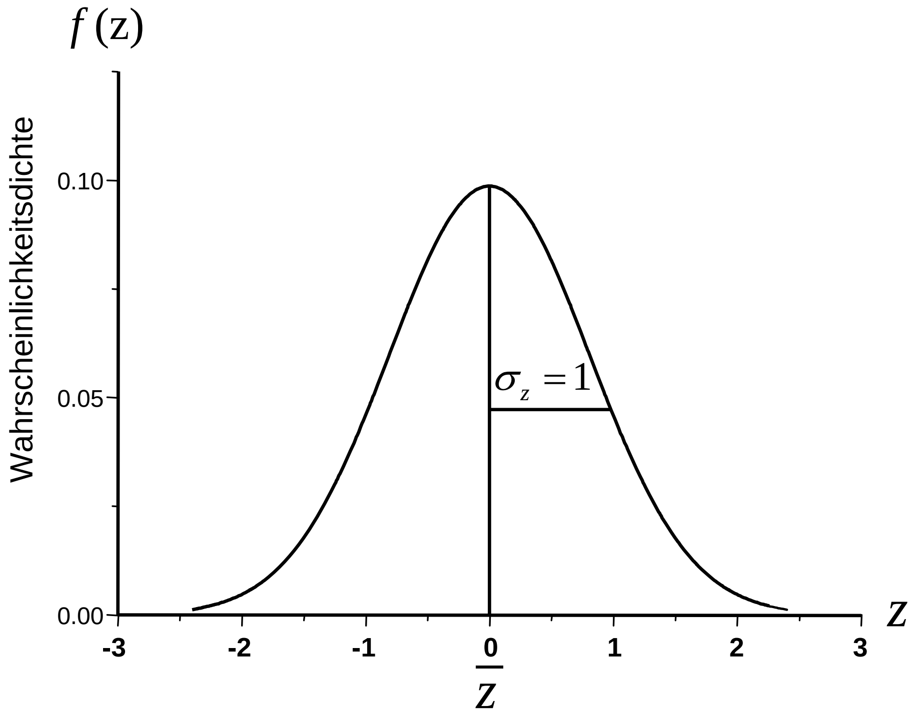
Dann gilt für die Varianz der Mittelwerte bzw. deren Standardfehler

Schätzformel

$$\hat{\sigma}_{\overline{x}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{N} = \frac{s_J^2}{N_J - 1} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\sigma}_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\overline{x}}^2}{N}} = \frac{s_J}{\sqrt{N_J - 1}}$$

(Beste Schätzung des Standardfehlers aus Stichprobendaten)





Normalverteilung

Standard-Normalverteilung

$$z = \frac{c - \mu_{\bar{x}}}{s}$$

Die z- Transformation übersetzt die Rohdatenskala in die Standardskala ($\bar{z} = 0$, $\sigma_z = 1$)

z- Skala der Differenzen von Mittelwerten

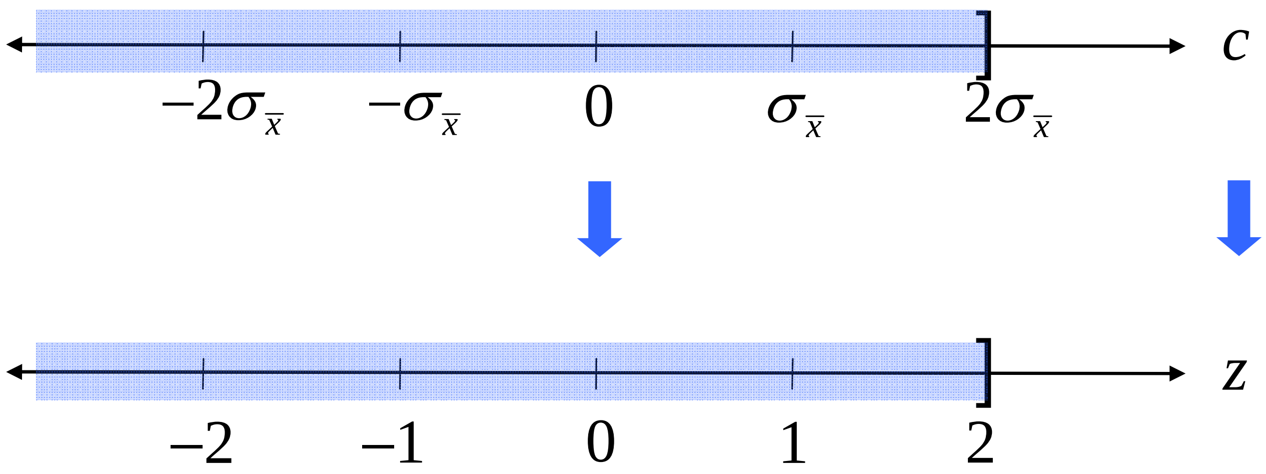
$$z = \frac{c - \mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{c - \overline{x}}{s \big/ \sqrt{N_J - 1}}$$

Unter der H0 gilt $c \geq \mu_{\overline{x}}$

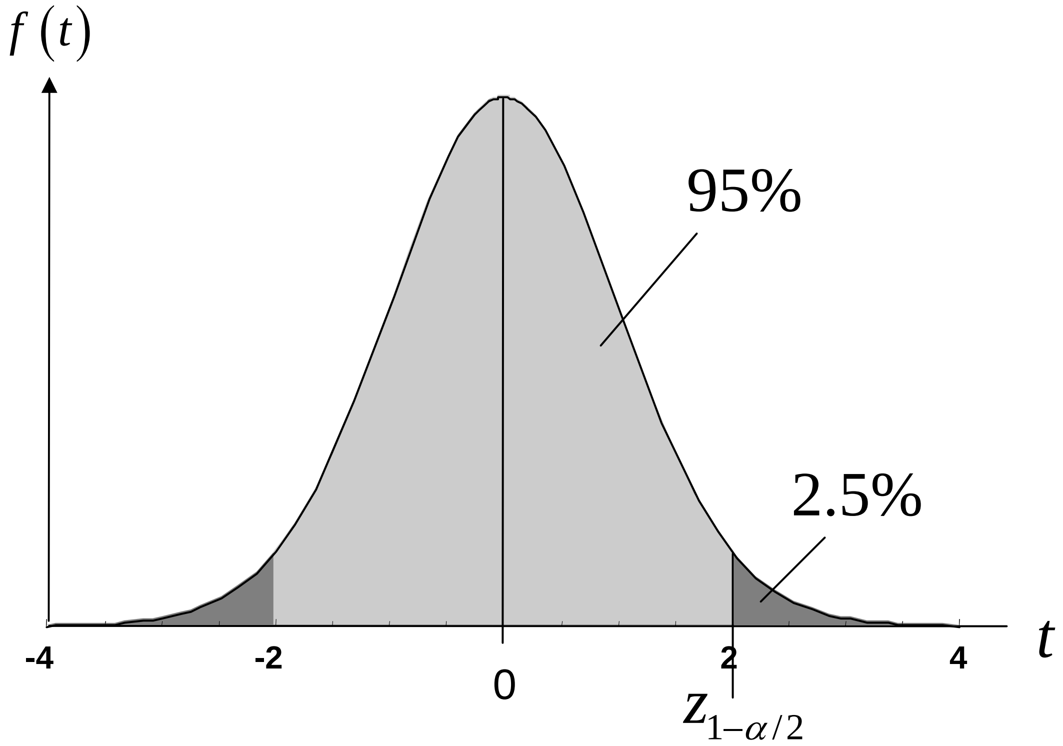
Prüfgrösse

Dann ist *z* normalverteilt für N > 30 und man bestimmt

Transformation



JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ



Prüfgrösse

$$z = \frac{c - \mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}}$$

Signifikanzniveau

$$\alpha = 0.05$$

$$P\left(z > z_{1-\alpha}\right) = \alpha$$

Annahmebereich	Ablehnungsbereich
$z \leq z_{1-\alpha}$	$z > z_{1-\alpha}$

Testen zum Signifikanzniveau α: Ist $z > z_{1\text{-}\alpha}$?

1. Prüfgrösse

Berechne $$z = \frac{c - \mu_{\overline{x}}}{\sigma_{\overline{x}}}$$

2. Kritischer z - Wert

Ermittle kritischen z - Wert $z_{1\text{-}\alpha}$ für ein α– Fehlerniveau

3. Entscheide

A. Gilt $z > z_{1\text{-}\alpha}$ → Ablehnung von H_0

(die Mittelwerte der J. und M. sind signifikant verschieden)

B. Gilt $z \leq z_{1\text{-}\alpha}$ → Beibehalten von H_0

(die Mittelwerte der J. und M. unterscheiden sich zufällig)

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Differenz der Mittelwerte

$\bar{x}_J$	c
17.2	15.3
s_J^2	
106	

$c - \bar{x}_J$

$15.3 - 17.2 = -2.1$

Standardfehler

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{106}{45-1}} = 1.55$$

Teste die Unterschreitungs-wahrscheinlichkeit

Prüfgrösse und Kritischer Wert

$$z = \frac{-2.1}{1.55} = -1.35$$

$$z_{1-\alpha} = z_{0.95} = -1.96$$

Entscheidung

$-1.35 > -1.96$ → d.h. $z > z_{1-\alpha}$ → H_1 ablehnen

Der Mittelwert der Jungen derselben Population entstammen (unterscheidet sich nicht signifikant)

Prinzip der Testung

Testung der Gültigkeit der „Nullhypothese“ über die Bestimmung der Auftretenswahrscheinlichkeit von c in der theoretischen Verteilung der Mittelwerte mit dem Erwartungswert $\mu_{\bar{x}} = \bar{x}$

Fall 1: $N_J > 30$

$$z = \frac{c - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

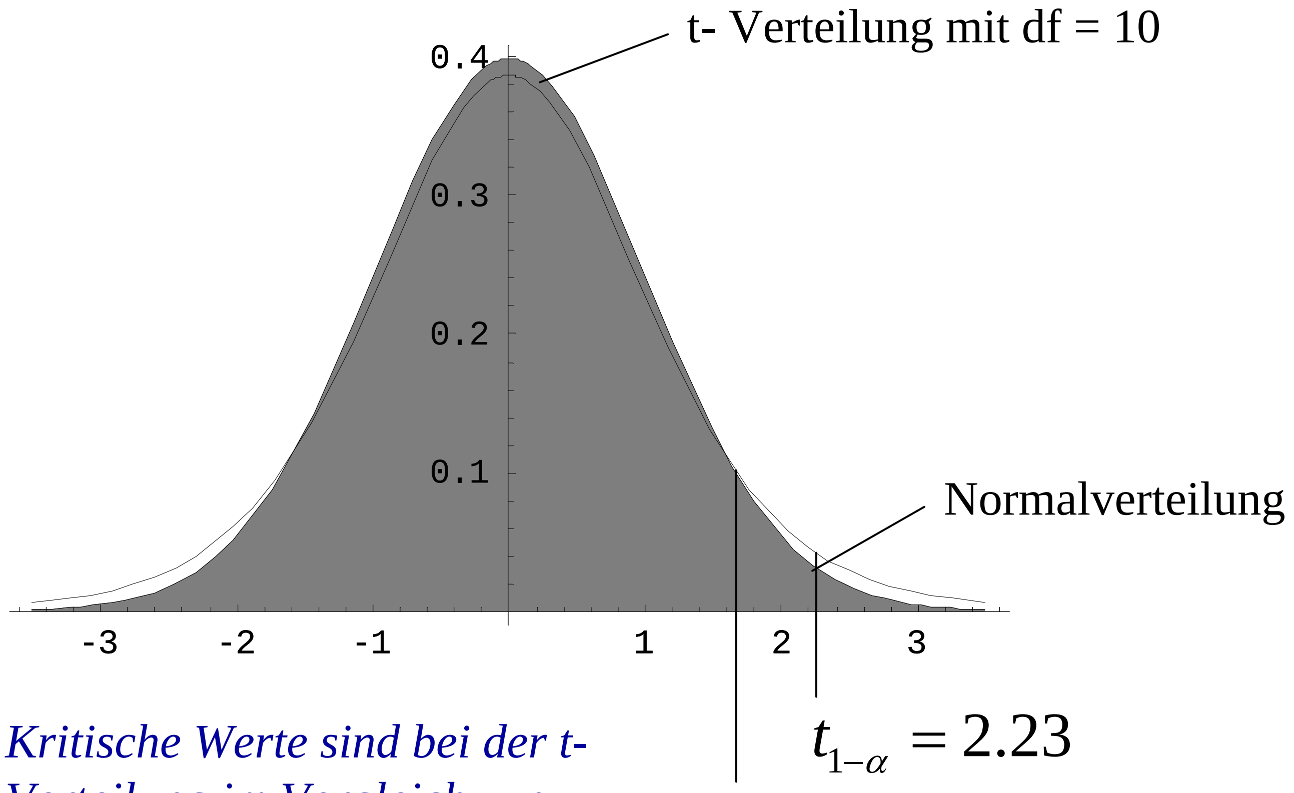
(standardnormalverteilt)

Fall 2: $N_J < 30$

$$t = \frac{c - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

(t – verteilt mit N_J - 1 Freiheitsgraden (df))

Die t-Verteilung



$$t_{1-\alpha} = 2.23$$

$$z_{1-\alpha} = 1.65$$

Kritische Werte sind bei der t-Verteilung im Vergleich zur Normalverteilung größer

➡ *Ablehnung der H_0 erst bei größeren Werten der Prüfgröße*

Differenz der Mittelwerte

$\bar{x}_J$	c
17.2	15.3
s_J^2	
106	N = 11

$c - \bar{x}_J$

$15.3 – 17.2 = -2.1$

Standardfehler

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{106}{45-1}} = 1.55$$

Teste die Unterschreitungs-wahrscheinlichkeit

Prüfgrösse und Kritischer Wert

$$t = \frac{-2.1}{1.55} = -1.35$$

$$t_{1-\alpha} = t_{0.95;\, df=10} = -2.23$$

Entscheidung

$-1.35 > -2.23$ ➡ d.h. $t > t_{1-\alpha}$ ➡ H_1 ablehnen

Der Mittelwert c kann derselben Population entstammen (unterscheidet sich nicht signifikant)

Der 2-Stichproben t-Test für unabhängige Stichproben

Vergleich zweier Mittelwerte

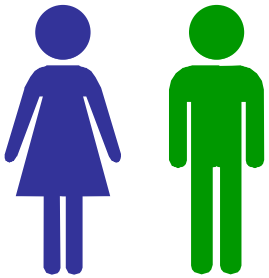
JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Problem

Gruppierungsvariable → Messgröße (metrisch)

Beispiel

Geschlecht → x



M J

Anzahl der gefundenen Zielelemente in einem Konzentrationsleistungstest

---

Frage

Unterscheidet sich die Leistung von Mädchen und Jungen im statistischen Mittelwert ?

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ

Stichprobe

Wir untersuchen 40 Mädchen und 45 Jungen

Beispieldaten

Geschlecht

M	J
$\bar{x}_M$	$\bar{x}_J$
24.1	17.2
s_M^2	s_J^2
173	106

$$\bar{x}_M - \bar{x}_J = \Delta\bar{x}$$

$$24.1 - 17.2 = 6.9$$

Frage

Gibt es wirkliche Leistungsunterschiede zwischen Jungen und Mädchen, oder ist der gefundene Unterschied „rein zufällig“ ?

Strategie

Ermittle die Wahrscheinlichkeit für den beobachteten Mittelwertsunterschied unter der Annahme, dass beide Gruppen in der Population denselben Mittelwert besitzen

Annahme

Die Populationsmittelwerte von Jungen und Mädchen sind gleich

Null-Hypothese

Alternativ-Hypothese

$$H_0 : \mu_J = \mu_M$$

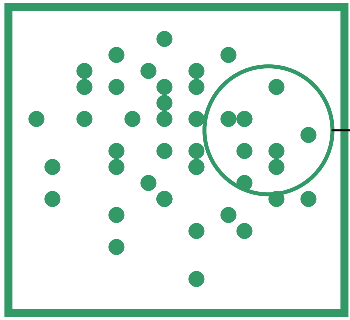
$$H_1 : \mu_J \neq \mu_M$$

Urteil

Ist der beobachtete Mittelwertsunterschied unter der H_0 sehr unwahrscheinlich (höchstens 5%), so lehnen wir die H_0 ab, und sehen die H_1 als die bessere Alternative an.

Sampling

Population der Jungen



Stichprobe des Umfangs N_J

$\overline{x}_J$

Mittelwertsdifferenz

$$\Delta\overline{x} = \overline{x}_M - \overline{x}_J$$

Tue dies k - mal:

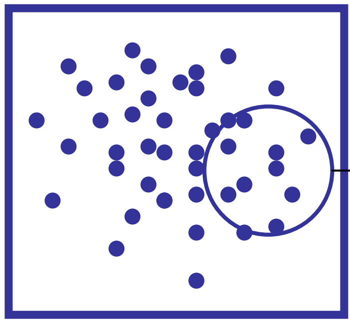
$$\Delta\overline{x}_1 = \overline{x}_{M1} - \overline{x}_{J1}$$

$$\Delta\overline{x}_2 = \overline{x}_{M2} - \overline{x}_{J2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\Delta\overline{x}_k = \overline{x}_{Mk} - \overline{x}_{Jk}$$

Population der Mädchen



$\overline{x}_M$

Stichprobe des Umfangs N_M

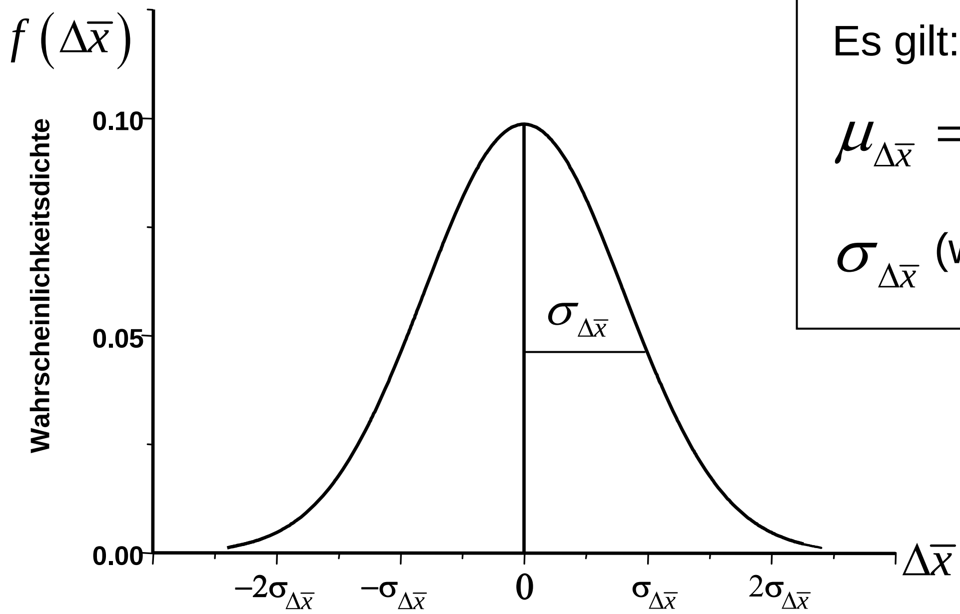
$$\left(\Delta\overline{x}_1 \quad \Delta\overline{x}_2 \quad \ldots \quad \Delta\overline{x}_i \quad \ldots \quad \Delta\overline{x}_k\right)$$

Verteilung der Differenzen von Mittelwerten

Central Limit Theorem

Inferenzstat. Schluss

Die Verteilung von Differenzen von Mittelwerten nähert sich mit wachsendem Umfang der Sample-Stichproben einer Normalverteilung. Für N > 30 ist die Approximation gut.



Es gilt:

$$\mu_{\Delta\bar{x}} = 0$$

$\sigma_{\Delta\bar{x}}$ (wird geschätzt)

In der theoretischen Verteilung der Differenzen von Mittelwerten wird die Wahrscheinlichkeitsbestimmung vorgenommen. Sie liegt dem inferenzstatistischen Schluss zugrunde.

Unabhängigkeit

Ist die Messvariable eine in beiden Populationen unabhängige ZV:

$$\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_M^2}{N_M} + \frac{\sigma_J^2}{N_J}}$$

Gleichheit der Populations-varianz

Jungen und Mädchen kommen aus derselben Population

$$\sigma_M^2 = \sigma_J^2 = \sigma^2$$

⬇

Standardfehler

$$\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{N_M} + \frac{1}{N_J}\right)}$$

Schätzung aus Stichproben

Für die Populationsvarianz verwendet man eine Schätzung aus den Daten beider Stichproben:

“Pooling”

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{N_M \cdot s_M^2 + N_J \cdot s_J^2}{N_M + N_J - 2} = \frac{SAQ_M + SAQ_J}{df_M + df_J}$$

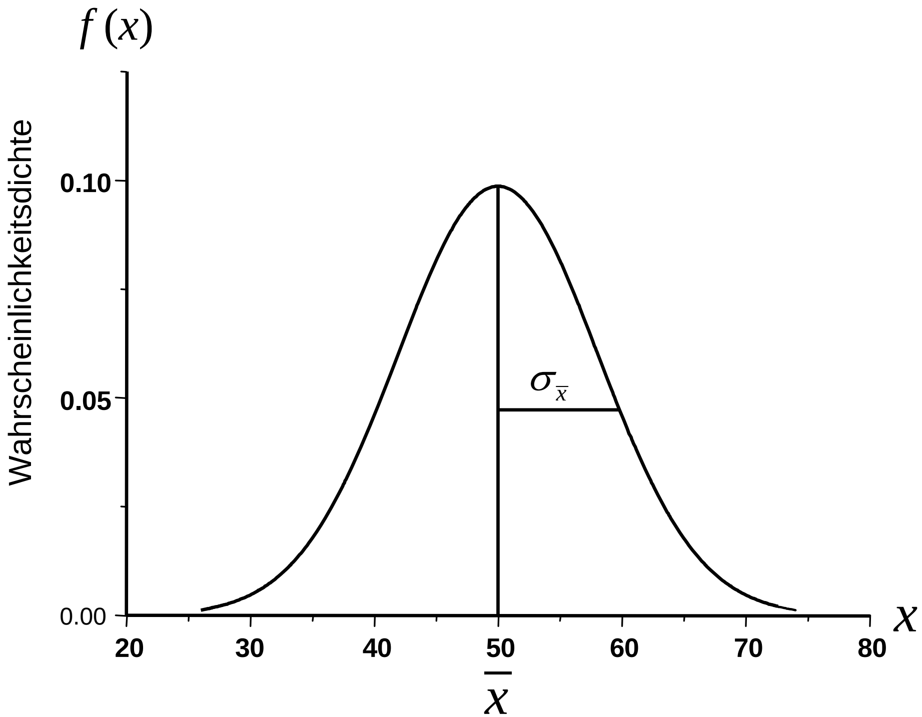
wobei s_M^2 und s_J^2 die Stichprobenvarianzen sind

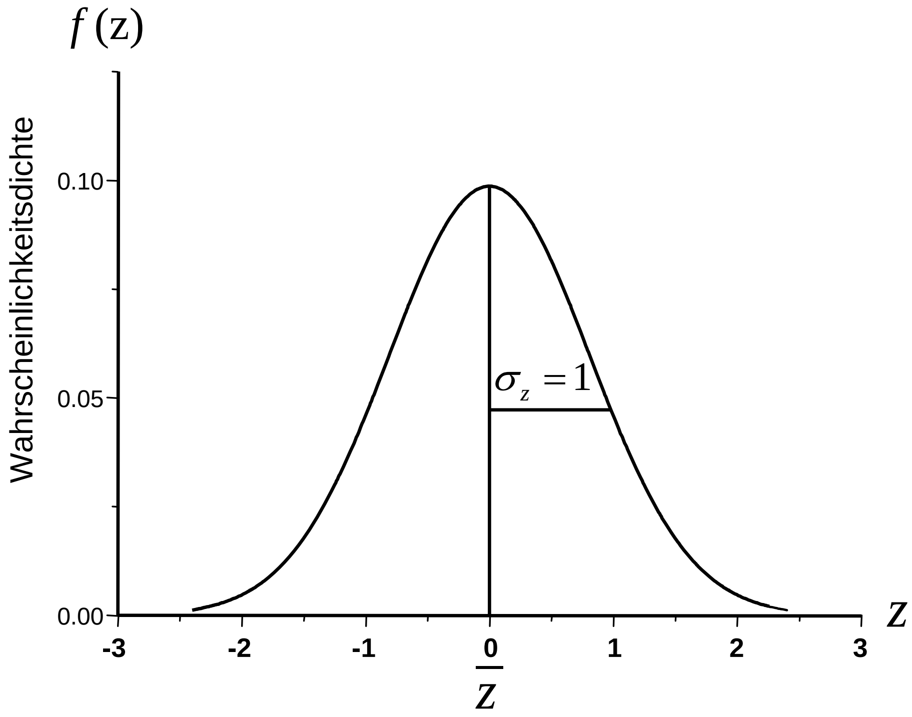
Dann gilt

Schätzformel

$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{\frac{N_M \cdot s_M^2 + N_J \cdot s_J^2}{N_M + N_J - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N_M} + \frac{1}{N_J}}$$

(Beste Schätzung des Standardfehlers aus Stichprobendaten)





Normalverteilung

Standard-Normalverteilung

$$z = \frac{x - \overline{x}}{s}$$

Die z- Transformation übersetzt die Rohdatenskala in die Standardskala ($\overline{z} = 0$, $\sigma_z = 1$)

z- Skala der Differenzen von Mittelwerten

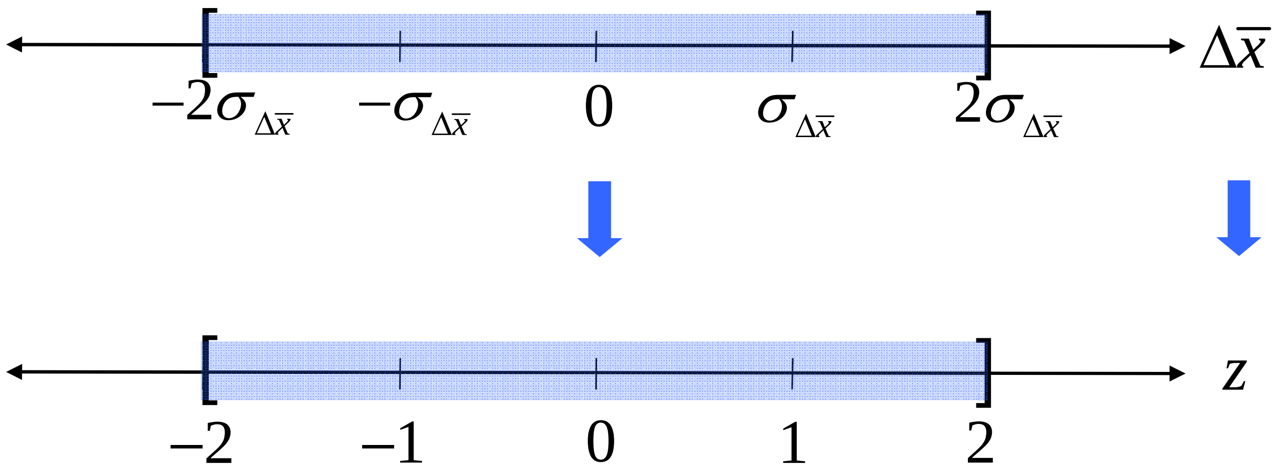
$$z = \frac{\Delta\bar{x} - \mu_{\Delta\bar{x}}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$$

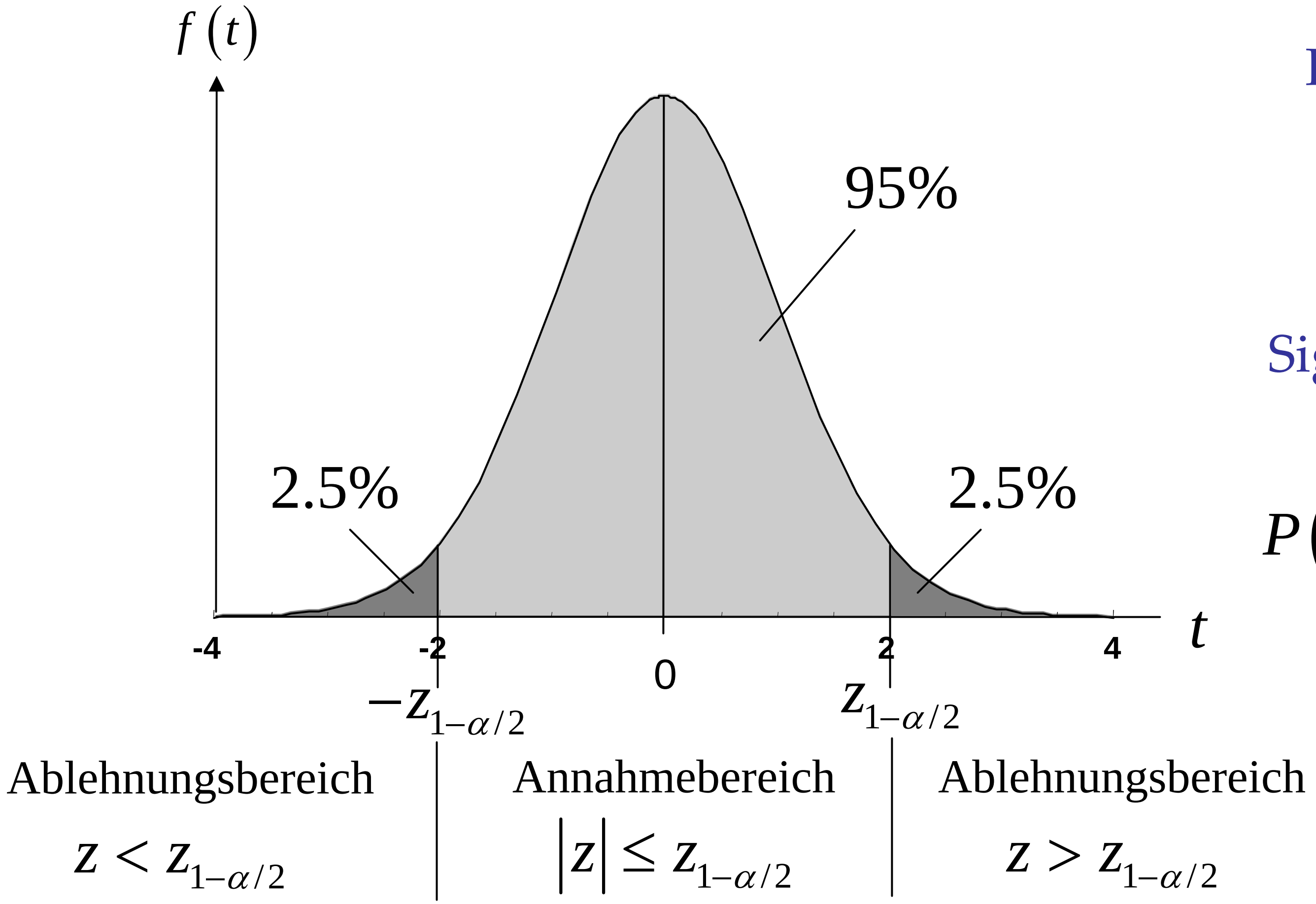
Unter der H0 gilt $\mu_{\Delta\bar{x}} = 0$

Prüfgrösse

Dann gilt: $z = \dfrac{\Delta\bar{x}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$ ist standardnormalverteilt

Transformation





Prüfgrösse

$$z = \frac{\Delta\bar{x}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$$

Signifikanzniveau

$$\alpha = 0.05$$

$$P\left(|z| > z_{1-\alpha/2}\right) = \alpha$$

Testen zum Signifikanzniveau α: Ist $|z| > z_{1-\alpha/2}$?

1. Prüfgrösse

Berechne $$z = \frac{\Delta\bar{x}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$$

2. Kritischer z - Wert

Ermittle kritischen z - Wert $z_{1-\alpha/2}$ für ein α– Fehlerniveau

3. Entscheide

A. Gilt $|z| > z_{1-\alpha/2}$ → Ablehnung von H_0

(die Mittelwerte der J. und M. sind signifikant verschieden)

B. Gilt $|z| \leq z_{1-\alpha/2}$ → Beibehalten von H_0

(die Mittelwerte der J. und M. unterscheiden sich zufällig)

Differenz der Mittelwerte

$\bar{x}_M$	$\bar{x}_J$
24.1	17.2
s_M^2	s_J^2
173	106

$$\bar{x}_M - \bar{x}_J = \Delta\bar{x}$$

$$24.1 - 17.2 = 6.9$$

Standardfehler

$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 173 + 45 \cdot 106}{40 + 45 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{45}} = 2.58$$

Prüfgrösse und Kritischer Wert

$$z = \frac{6.9}{2.58} = 2.67 \qquad z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Entscheidung

$|2.67| > 1.96 \Rightarrow$ d.h. $|z| > z_{1-\alpha/2} \Rightarrow$ H_0 ablehnen

Die Mittelwerte entstammen nicht derselben Population (unterscheiden sich signifikant)

Prinzip der Testung

Testung der Gültigkeit der „Nullhypothese“ über die Bestimmung der Auftretenswahrscheinlichkeit von $\Delta\bar{x}$ in der theoretischen Verteilung der Differenzen von Mittelwerten mit dem Erwartungswert $\mu_{\Delta\bar{x}} = 0$

Fall 1: $N_M + N_J \geq 50$

$$z = \frac{\Delta\bar{x} - \mu_{\Delta\bar{x}}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$$

(standardnormalverteilt)

Fall 2: $N_M + N_J < 50$

$$t = \frac{\Delta\bar{x} - \mu_{\Delta\bar{x}}}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$$

(t – verteilt mit $N_M + N_J$ - 2 Freiheitsgraden)

Differenz der Mittelwerte

$\bar{x}_M$	$\bar{x}_J$
24.1	17.2
s_M^2	s_J^2
173	106

$$\bar{x}_M - \bar{x}_J = \Delta\bar{x}$$

$$24.1 - 17.2 = 6.5$$

Standardfehler

$$\hat{\sigma}_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 173 + 25 \cdot 106}{20 + 25 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}} = 3.58$$

Prüfgrösse und Kritischer Wert

$$t = \frac{6.9}{3.58} = 1.99 \qquad t_{1-\alpha/2} = t_{0.975;\, df=43} = 2.63$$

Entscheidung

$|1.99| < 2.63$ ➡ d.h. $|t| > t_{1-\alpha/2}$ ➡ H_1 ablehnen

Die Mittelwerte entstammen nicht verschiedenen Populationen (unterscheiden sich nicht signifikant)

Varianz-homogenität

a. Die Populationsvarianzen die beiden Stichproben zu Grunde liegen, müssen gleich (homogen) sein. (Prüfung mit geignetem Verfahren)

Unabhängigkeit

b. Die Messeinheiten innerhalb jeder Stichprobe müssen unabhängig sein.
c. Die Messeinheiten beider Stichproben dürfen nicht teilweise paarweise zuzuordnen sein.

Verletzungen

Der Test ist relativ robust gegen Verletzungen der Varianzhomogenität. Verletzungen der Unabhängigkeit (b.) führen zur Ungültigkeit der Prüfgrösse, der Unab-hängigkeit (c.) je nach Höhe der Korrelationen zu progressiven (kleine Korr.) oder zu konservativen Entscheidungen (hohe Korr.).