Forschungsstatistik II

Trendtests in ANOVA und rm ANOVA

Günter Meinhardt
Johannes Gutenberg Universität Mainz

Trendtests in ANOVA und rm ANOVA

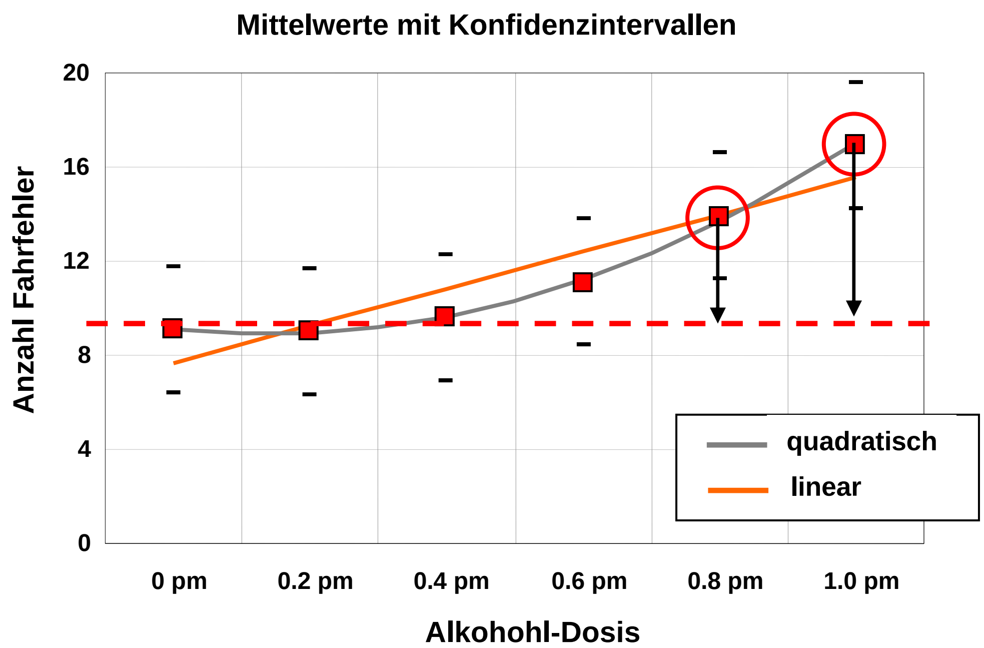
Allgemeines

- Nach der Overall-Signifikanz die Ergebnisse der Wirkungsweise explorieren.
- Trends sind definierbar, wenn die Stufen der UVs metrische Levels (Dosen, Zeiten, Anzahlen) repräsentieren, nicht jedoch bei kategorialen UVs.
- Einfach zu interpretieren sind orthogonale Trendpolynome.
- Jede Ordnung des Polynoms liefert eine orthogonale Trendkomponente, dessen Varianzanteil getrennt bestimmt und getest werden kann.
- Ermöglicht Prognose des Erreichens von Kriterien.

Voraussetzung

- Signifikanz des Faktors, unter dem Trends vermutet werden.
- In rm Designs die üblichen Voraussetzungen der rm ANOVA (paarweise homogene Varianz-Covarianzmatrizen (streng), bzw. Homogene Varianzen der Abweichungen von Zellen (Spherizität), Normalverteilung).

Beispiel



Prototypische Datensituation

- Ein Dosierungsfaktor mit k- Stufen, k > 5 oder Messwiederholungen über mind. 5 Zeitpunkte
- monoton steigender oder fallender Gesamtverlauf
- Strategie:
  1. Absichern des Trends
  2. Mit gezielten Einzelvergleichen Effekt gegen Baseline absichern
  3. Superposition der signifikanten Trendkomponenten zur Trendberechnung und Kriteriumsvorhersage verwenden

Trendpolynom

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}$$

für einen Dosisfaktor mit k- Stufen beschreibt die Daten perfekt, wenn alle Komponenten bis k-1 eingehen.

$$\begin{aligned} Y &= \text{abhängige Variable} \\ x &= \text{Treatment Ausprägung (metrisch)} \\ a_0 &= \text{Konstante} \\ a_1 x &= \text{Lineare Komponente} \\ a_2 x^2 &= \text{Quadratische Komponente} \\ a_3 x^3 &= \text{Kubische Komponente} \end{aligned}$$

Übliche Polynome

- Lineares Polynom: Anpassungsgerade
- Ein quadratisches Polynom beschreibt monotones nichtlineares Wachstum oder Abfallen der Werte
- Ein kubisches Polynom kann auch Änderungen im Verlauf der Kurve beschreiben

Orthogonale Polynome

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}$$

Für Linearkombinationen C_i werden Koeffizienten so gewählt,
daß die Trendkomponenten für die Mittelwerte stets orthogonal sind:

$$C_i = c_{i1}\bar{Y}_1 + c_{i2}\bar{Y}_2 + \ldots + c_{ik}\bar{Y}_k$$

Bedingungen

mit

$$\sum_j c_{ij} = 0$$

(Kontrastbedingung)

$$\sum_j c_{ij} c_{i'j} = 0$$

(Orthogonalität der Ordnungen)

Orthogonale Polynome

Die Koeffizienten c_{ij} liegen bis zu hohen Anzahlen für k in Tabellen vor.

Coefficients of orthogonal polynomials

k	Polynomial	$X = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\Sigma\xi'^2$	λ
3	Linear	−1	0	1								2	1
	Quadratic	1	−2	1								6	3
4	Linear	−3	−1	1	3							20	2
	Quadratic	1	−1	−1	1							4	1
	Cubic	−1	3	−3	1							20	10/3
5	Linear	−2	−1	0	1	2						10	1
	Quadratic	2	−1	−2	−1	2						14	1
	Cubic	−1	2	0	−2	1						10	5/6
	Quartic	1	−4	6	−4	1						70	35/12
6	Linear	−5	−3	−1	1	3	5					70	2
	Quadratic	5	−1	−4	−4	−1	5					84	3/2
	Cubic	−5	7	4	−4	−7	5					180	5/3
	Quartic	1	−3	2	2	−3	1					28	7/12
7	Linear	−3	−2	−1	0	1	2	3				28	1
	Quadratic	5	0	−3	−4	−3	0	5				84	1
	Cubic	−1	1	1	0	−1	−1	1				6	1/6
	Quartic	3	−7	1	6	1	−7	3				154	7/12
8	Linear	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7			168	2
	Quadratic	7	1	−3	−5	−5	−3	1	7			168	1
	Cubic	−7	5	7	3	−3	−7	−5	7			264	2/3
	Quartic	7	−13	−3	9	9	−3	−13	7			616	7/12
	Quintic	−7	23	−17	−15	15	17	−23	7			2184	7/10
9	Linear	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4		60	1
	Quadratic	28	7	−8	−17	−20	−17	−8	7	28		2772	3
	Cubic	−14	7	13	9	0	−9	−13	−7	14		990	5/6
	Quartic	14	−21	−11	9	18	9	−11	−21	14		2002	7/12
	Quintic	−4	11	−4	−9	0	9	4	−11	4		468	3/20
10	Linear	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	9	330	2
	Quadratic	6	2	−1	−3	−4	−4	−3	−1	2	6	132	1/2
	Cubic	−42	14	35	31	12	−12	−31	−35	−14	42	8580	5/3
	Quartic	18	−22	−17	3	18	18	3	−17	−22	18	2860	5/12
	Quintic	−6	14	−1	−11	−6	6	11	1	−14	6	780	1/10

Quadratsummen

Mit diesen Koeffizienten gilt

$$QS_{Treat} = QS_{lin} + QS_{quad} + QS_{cub} + \ldots + QS_{k-1}$$

Die Treatmentquadratsumme zerlegt sich additiv in die Quadratsummen-Anteile der einzelnen orthogonalen Trendpolynome.

Trend-QS:

$$QS_{Trend\,(i)} = \frac{n \cdot C_i^2}{\sum_j c_{ij}^2}$$

Test

Jede Trendkomponente hat einen Freiheitsgrad (df = 1).
Dann gilt der F- Test:

$$F = \frac{QS_{Trend}}{\hat{\sigma}^2_{error}}$$

Mit $df_{\text{zähler}} = 1$ und df Nenner = df_{error}.

In komplexeren Designs oder rm Designs ist die die jeweilige Testvarianz des Faktors einzusetzen.

Komponenten

Man teilt oft ein in lineare Komponenten und Restkomponenten, um den nichtlinearen Anteil abzuschätzen.

$$QS_{nonlin} = QS_{Treat} - QS_{lin}$$

Diese Komponente hat k-2 Freiheitsgrade (df = k-2).
Dann gilt der F- Test:

$$F = \frac{QS_{nonlin}/(k-2)}{\hat{\sigma}^2_{error}}$$

Mit $df_{zähler}$ = k-2 und df Nenner = df_{error}.

Nichtlinearer Trend-Test

Linearer Trend

Die Polynomkoeffizienten aller Trendkomponenten erhält man wie üblich über die Methode der Normalgleichungen.

η^2

Das Eta Quadrat kann aufgefasst werden als das Quadrat der Korrelation von den Daten mit der einem Polynom vom Grad k-1

$$\eta^2 = \frac{QS_{Treat}}{QS_{Tot}}$$

Trendvarianz-Aufklärung

Entsprechend kann man die einzelnen Trendanteile bewerten:

$$\eta^2_{Trend} = \frac{QS_{Trend}}{QS_{Tot}}$$

Damit kann man die Zunahme der Varianzaufklärung durch Hinzunahme einzelner Trendkomponenten bewerten.

Intra-Class Correlation

Man kann eine Intraklassenkorrelation von Faktorstufen und Treatment berechnen:

$$r_{\text{intra}} = \sqrt{\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_\tau^2 + \sigma_{error}^2}} \qquad \text{mit} \qquad \sigma_\tau^2 = \frac{\Sigma\tau^2}{k-1} = \frac{\hat{\sigma}^2_{Treat}}{n}$$

Sie gibt den korrelativen Zusammenhang der Treatmentstufen mit den Daten an.

Einzelvergleiche

In der ANOVA prüft man Kontraste gewöhnlich über F- Tests. Wegen

$$t_{df}^2 = F_{(1,df)}$$

ist ein t- Test einem F- Test äquivalent. Es gilt

$$t^2 = F = \frac{\left(\Delta \bar{x}\right)^2}{\hat{\sigma}_{\Delta \bar{x}}^2}$$

mit Zähler: $df = 1$
und Nenner: $df = k(n-1)$

Für den Standardfehler $\hat{\sigma}_{\Delta \bar{x}}$ eines Vergleichs gilt

$$\widehat{Var}(D) = \hat{\sigma}_{\Delta \bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_j c_j^2\right)\hat{\sigma}_{error}^2$$

mit den Kontrastbedingungen

$$\boxed{D = \sum_j c_j \cdot \bar{x}_j \qquad \sum_j c_j = 0}$$

F-Test Kontraste

$$\boxed{F = \frac{D^2}{\widehat{Var}(D)} = \frac{n \cdot D^2}{\sigma_{error}^2 \cdot \sum_j c_j^2}}$$

(Kontrast über F-Test prüfen)

Paarvergleiche

Für multiple Paarvergleiche muss das α- Niveau gegen multiples Testen adjustiert werden (Bonferroni), um konservativ sicher zu testen.

⬇

Strategie

1. Teste Trends im Treatmentfaktor. Signifikanz des linearen Trends sichert bereits die monotone Folge der Stufen ab. Signifikanz des quadratischen Trends sichert den nichtlinearen Anstieg (Abfall).

2. Berechne das kritische Scheffe‘ Intervall. Bei grossen Effekten reicht die kritische Spannweite bereits aus.

3. Sichere den Unterschied der letzten Faktorstufen gegen den der ersten Faktorstufen mit wenigen Einzeltests ab. Damit ist zumeist der gesamte Gehalt der inhaltliche Hypothesen über Lernverlauf oder Sättigung statistisch geprüft.

[Excel-Beispiel]

Trendtests in rm ANOVA

Allgemeines

- Trendanalyse ist ein häufig eingesetztes Verfahren in rm ANOVA Designs, da sie die Art der Wirkverlaufes einer Intervention beurteilen lässt.
- Trends sind in rm Designs grundsätzlich definierbar, da die Stufen der UVs als Zeitpunkte oder Anzahlen der Wiederholung der Gabe eines Treatment grundsätzlich metrische Levels repräsentieren.
- Trends sind ebenfalls in Mischdesigns mit Grouping-Faktoren und rm Faktoren definierbar. Für die Testung des Trends gilt, dass der Trend immer an der Prüfvarianz des Faktors geprüft wird.
- Trendanalyse ermöglicht eine Prognose des Zeitpunktes, an dem ein Lern- oder Wirkkriterium voraussichtlich erreicht ist.

Voraussetzung

- Die Testung der Signifikanz des rm Faktors, der mögliche Trends enthält, ist in der rm ANOVA an strenge Voraussetzungen gebunden. (Eigenschaften der Varianz-Covarianz Matrix). Bei Verletzungen führt der F- Test zu progressiven Entscheidungen.
- Verletzungen der Voraussetzungen können mit geeigneten Verfahren (Box, Greenhouse-Geisser) korrigiert werden.

Verbundene Symmetrie (totale Homogenität)

Sind für insgesamt k Messzeitpunkte die Korrelationen zwischen allen Messzeitpunkten gleich und ebenfalls die Varianzen, so erhält man als Varianz-Covarianz-Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathrm{cov} & \cdots & \mathrm{cov} \\ \mathrm{cov} & \sigma^2 & \cdots & \mathrm{cov} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov} & \mathrm{cov} & \mathrm{cov} & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

(verbund-symmetrische Matrix). Diese strenge Forderung an die Struktur der Daten für die rm-ANOVA ist aber nicht nötig.

Homogenitäts-Voraussetzung der rm ANOVA

Statt dessen muss für die Gültigkeit der F-Statistik folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\mathrm{var}\left(X_j - X_{j'}\right) = a = \mathrm{const.}$$

Die Varianz der Differenz der Messwerte zweier beliebiger Messzeitpunkte j und j‘ muss dieselbe Konstante ergeben. Verletzungen dieser Voraussetzung führen zu progressiven Verfälschungen des F-Tests.

Matrix-Bedingung: Zirkularität

Anders geschrieben:

$$\operatorname{var}\left(X_j - X_{j'}\right) = \sigma_{jj} + \sigma_{j'j'} - 2\sigma_{jj'} = \text{const.}$$

Varianz-Covarianz Matrizen Σ, die diese Bedingung erfüllen, heissen zirkulär.

Beispiel

$$\mathbf{\Sigma}_X = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ 5 & 11 & 7 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12} &= 9 + 11 - 2 \cdot 5 &= 10 \\ \sigma_{11} + \sigma_{33} - 2\sigma_{13} &= 9 + 13 - 2 \cdot 6 &= 10 \\ \sigma_{22} + \sigma_{33} - 2\sigma_{23} &= 11 + 13 - 2 \cdot 7 &= 10 \end{aligned}$$

Man verifiziert ebenso, dass eine verbund-symmetrische Matrix ebenfalls die Eigenschaft der Zirkularität besitzt.

[Excel-Beispiel]

Abweichung von Zirkularität

Die Abweichung der Varianz-Covarianz-Matrix von der Zirkularität wird mit einem Abweichungsmaß ε bewertet:

Der Range der möglichen Abweichungen ist $[(k-1)^{-1} \ldots 1]$

(nicht zirkulär) **(perfekt zirkulär)**

Freiheitsgrad-korrektur

Das Abweichungsmaß ε wird für eine Freiheitsgradkorrektur der F- Statistik verwendet:

Box-Correction

Nach Box ist die F- Statistik in rm Designs verteilt wie

$$F\left((k-1)\varepsilon,(n-1)(k-1)\varepsilon\right) \qquad (\#)$$

Die für Verletzungen der Zirkularitätsannahme korrigierte F-Statistik hat immer weniger (oder gleich viele) Freiheitsgrade wie die unkorrigierte F-Statistik, und liefert daher stets einen konservativeren Test der Nullhypothese.

Greenhouse-Geisser Correction

Da die untere Grenze für ε (maximale Verletzung) 1/(k-1) ist, folgt

$$F\left(1,\left(n-1\right)\right)$$

als konservativster F- Test, der jede Spherizitätsverletzung auffängt.

Huynh-Feldt-Correction

Die Gültigkeit von (#) ist gut untersucht. Huynh und Feldt schlagen vor, korrigierte ε in (#) zu verwenden:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{n\left(k-1\right)\varepsilon - 2}{\left(k-1\right)\left[n-1-\left(k-1\right)\varepsilon\right]}$$

aber kombiniert mit der Regel:

Wenn $\tilde{\varepsilon} > 1 \rightarrow \tilde{\varepsilon} = 1$

(den Abweichungswert auf 1 setzen, falls $\tilde{\varepsilon}$ größer wird)

Mit der Box Formel lässt sich nach Verwendung von $\tilde{\varepsilon}$ ein optimales Ergebnis erreichen.