Mathematische und statistische Methoden I

Dr. Malte Persike

persike@uni-mainz.de
lordsofthebortz.de
twitter.com/methodenlehre
tinyurl.com/gplusmethodenlehre

Sprechstunde jederzeit nach Vereinbarung und nach der Vorlesung

Wallstr. 3, 6. Stock, Raum 06-206

WiSe 2011/2012

Fachbereich Sozialwissenschaften
Psychologisches Institut
Johannes Gutenberg Universität Mainz

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Hat das Treatment **keinen Effekt**, so sind Unterschiede zwischen Mittelwerten der Treatmentstufen rein zufällig

	A_1	…	A_p	
B_1	$\mu+a_1+b_1+a_1b_1+e_{1,1,1}$	…	$\mu+a_p+b_1+a_pb_1+e_{1,1,p}$	$\bar{B}_1$
	…	…	…	
	$\mu+a_1+b_1+a_1b_1+e_{n_{11},1,1}$	…	$\mu+a_p+b_1+a_pb_1+e_{n_{1p},1,p}$	
B_q	$\mu+a_1+b_q+a_1b_q+e_{1,q,1}$	…	$\mu+a_p+b_q+a_pb_q+e_{1,q,p}$	
	…	…	…	$\bar{B}_2$
	$\mu+a_1+b_q+a_1b_q+e_{n_{q1},q,1}$	…	$\mu+a_p+b_q+a_pb_q+e_{n_{qp},q,p}$	

Mittelwert: $\bar{A}_1$ … $\bar{A}_p$

Streuungs-vergleich

QS-Zerlegung

Prüfgröße & Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Hat das Treatment **keinen Effekt**, so sind Unterschiede zwischen Mittelwerten der Treatmentstufen rein zufällig
- Die Streuung der Stufenmittelwerte kann dann nur aus der Fehlerstreuung entstehen. Es muss gelten:

$$\boxed{s^2_{Treat} \triangleq s^2_{Fehler}}$$

- **Ansatz:** Wenn man also feststellt, dass die Streuung der Stufenmittelwerte **deutlich größer** ist als die Fehler-streuung, kann die Fehlerstreuung allein nicht mehr für die Streuung der Stufenmittelwerte verantwortlich sein
- Das Treatment hat dann einen **Effekt**, es gibt also **systematische Unterschiede** zwischen den Stufenmittelwerten

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- **Problem:** Diese Logik von Fehler- und Treatment-streuung ist nur dann hilfreich, wenn sie nicht nur für alle Treatmentstufen gemeinsam, sondern **individuell für jedes Treatment bzw. die Interaktion** gilt.
- **Denn:** Ziel der ANOVA ist das Treffen separater Aussagen über die Wirkung der einzelnen Treatments.
- **Ansatz:** Es ist zu zeigen, dass die Streuung der Stufenmittelwerte des Faktors A nicht auch von einem möglichen Effekt des Faktors B oder der Interaktion AB abhängt.
- Diesen Beweis liefert die **Quadratsummenzerlegung** in der Varianzanalyse

Streuungs-vergleich

QS-Zerlegung

Prüfgröße & Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Exakt wie in der Multiplen Regression wird von der **Streuung aller Daten** um den Mittelwert ausgegangen.
- Der **Mittelwert aller Daten (Grand Mean)**

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot p \cdot q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} x_{ikj} = G = \bar{G}$$

wird in der ANOVA oft als **G** oder **G quer** bezeichnet

- Deren Streuung, ausgedrückt als Quadratsumme ist

$$QS_{Tot} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \left(x_{ikj} - \bar{G} \right)^2$$

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Man könnte statt der **Quadratsumme** auch die **Varianz** betrachten, hätte aber lediglich den zusätzlichen Faktor $^1/_N$ bzw. $^1/_{n \cdot p \cdot q}$ in voriger Gleichung
- Mit dem **linearen Modell der ANOVA** wird daraus

$$QS_{Tot} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \left(\mu + a_j + b_k + a_j b_k + e_{ikj} - \overline{G} \right)^2$$

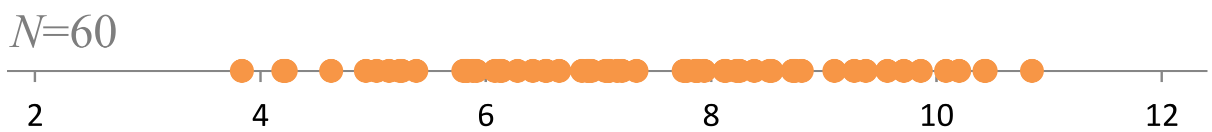
indem einfach der Messwert jeder Person x_{ikj} durch die Modellgleichung ersetzt wird

- Diese Quadratsumme repräsentiert die **gesamte Streuung in den Daten** um den gemeinsamen Mittelwert aller Daten

Varianzanalyse

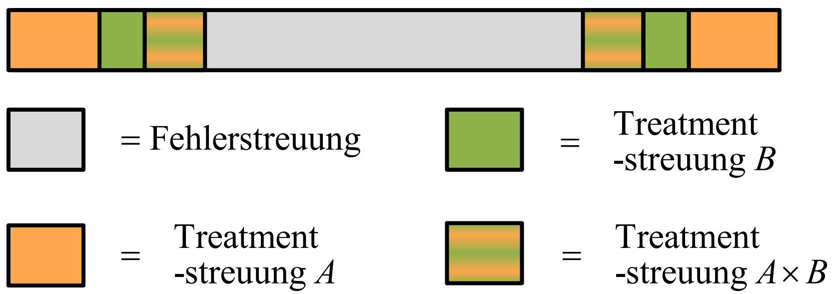
Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Die Aufteilung der Streuung in Fehler- und Treatment-streuung läuft nun darauf hinaus zu verstehen, wie sich die Gesamtstreuung der Daten



$$\text{Datenstreuung: } QS_{Tot} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(\mu + a_j + b_k + a_j b_k + e_{ikj} - \overline{G}\right)^2$$

zerlegen lässt in



Streuungs-vergleich

QS-Zerlegung

Prüfgröße & Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- **Problem:** a_j und b_k und a_jb_k und e_{ijk} und μ sind unbekannt.
- Man kann aber aus den Daten andere, inhaltlich ähnliche Kennzahlen berechnen.

	A_1	…	A_p	
B_1	$\mu+a_1+b_1+a_1b_1+e_{1,1,1}$	…	$\mu+a_p+b_1+a_pb_1+e_{1,1,p}$	
	…	…	…	$\bar{B}_1$
	$\mu+a_1+b_1+a_1b_1+e_{n11,1,1}$	…	$\mu+a_p+b_1+a_pb_1+e_{n1p,1,p}$	
B_q	$\mu+a_1+b_q+a_1b_q+e_{1,q,1}$	…	$\mu+a_p+b_q+a_pb_q+e_{1,q,p}$	
	…	…	…	$\bar{B}_2$
	$\mu+a_1+b_q+a_1b_q+e_{nq1,q,1}$	…	$\mu+a_p+b_q+a_pb_q+e_{nqp,q,p}$	
Mittelwert:	$\bar{A}_1$	…	$\bar{A}_p$	Gesamtmittel $\bar{x}$ oder $\bar{G}$

Streuungs-vergleich

QS-Zerlegung

Prüfgröße & Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- So muss für den Mittelwert aller Personen in einer Faktorstufe des Faktors A gelten:

$$\boxed{\overline{A}_j = \frac{1}{n \cdot q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} \left(\mu + a_j + b_k + a_j b_k + e_{ikj} \right)}$$

- Und ebenso für die Stufenmittelwerte des Faktors B:

$$\boxed{\overline{B}_k = \frac{1}{n \cdot p} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \left(\mu + a_j + b_k + a_j b_k + e_{ikj} \right)}$$

- Und natürlich auch für die Zellmittelwerte:

$$\boxed{\overline{A_j B_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\mu + a_j + b_k + a_j b_k + e_{ikj} \right)}$$

Streuungs-
vergleich

QS-Zerlegung

Prüfgröße &
Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Für den Gesamtmittelwert aller Personen gilt zudem

$$\boxed{\bar{G} = \frac{1}{n \cdot p \cdot q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \left(\mu + a_j + b_k + a_j b_k + e_{ikj} \right)}$$

- Diese Gleichungen kann man nach den bekannten Termen $\bar{G},\ \bar{A}_j,\ \bar{B}_k,\ \overline{A_j B_k}$ **umformen** und in die Gleichung der Quadratsumme **einsetzen**

- Nach weiteren Umformungen erhält man eine Gleichung, die zeigt, dass sich die gesamte Quadratsumme tatsächlich aufteilen lässt in **unabhängige Quadratsummen** für die Treatments und den Fehler.

Streuungs-vergleich
QS-Zerlegung
Prüfgröße & Ergebnistab.
Plots

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Es zeigt sich nämlich, dass gilt:

$$\boxed{QS_{Tot} = QS_{TreatA} + QS_{TreatB} + QS_{TreatA\times B} + QS_{Fehler}}$$

- Gesamte QS:

$$QS_{Tot} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(x_{ikj} - \bar{G}\right)^2$$

QS Treatment A:
(q = Treat.stufen von B)

$$QS_{TreatA} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(\bar{A}_j - \bar{G}\right)^2$$

QS Treatment B:
(p = Treat.stufen von A)

$$QS_{TreatB} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(\bar{B}_k - \bar{G}\right)^2$$

QS Fehler:
(p = Treat.stufen von A)

$$QS_{Fehler} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(x_{ikj} - \overline{A_j B_k}\right)^2$$

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Gäbe es keine Interaktion, so sollte man annehmen, dass die beiden Faktoren additiv zusammenwirken.
- Dann sollte gelten: $\boxed{\overline{A_j B_k}\,' = \bar{A}_j + \bar{B}_k - \bar{G}}$
- Der Grand Mean muss einmal subtrahiert werden, da er in beiden Stufenmittelwerten enthalten ist
- Die Differenz dieser beiden Terme ist dann die **Interaktionswirkung** (i.e. der nicht-additive Teil des gemeinsamen Effektes von A und B.

$$\boxed{QS_{A\times B} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(\overline{A_j B_k} - \overline{A_j B_k}\,'\right)^2}$$

$$\text{mit } \quad \overline{AB}\,'_{jk} = \bar{A}_j + \bar{B}_k - \bar{G}$$

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Zurückkehrend zur Ausgangsidee sollte man nun vermuten, dass **kein Effekt eines Treatments** dazu führt, dass die Streuung zwischen seinen Stufen-mittelwerten ähnlich hoch ist wie die Fehlerstreuung

Also: $\boxed{QS_{TreatA} \cancel{\hat{=}} QS_{Fehler}}$ wenn Faktor A keinen Effekt hat

- **Aber:** Es kann gezeigt werden, dass die Quadratsummen zuvor transformiert werden müssen, damit der Vergleich stimmt
- Diese transformierten Quadratsummen werden als **Populationsvarianzen** bezeichnet

Streuungs-vergleich
QS-Zerlegung
Prüfgröße & Ergebnistab.
Plots

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Die Berechnung der **Populationsvarianzen** erfordert statt des – bei der Varianzberechnung üblichen – Terms $^1/_n$ andere Nenner.
- Statt des n werden die so genannten **Freiheitsgrade** (df, degrees of freedom) eingesetzt.
- Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} df_{Tot} &= n \cdot p \cdot q - 1 \\ df_{TreatA} &= p - 1 \\ df_{TreatB} &= q - 1 \\ df_{TreatA \times B} &= (p-1) \cdot (q-1) \\ df_{Fehler} &= p \cdot q \cdot (n-1) \end{aligned}}$$

Varianzanalyse

Zweifaktorielle ANOVA

- Damit werden die Populationsvarianzen berechnet als

$$\hat{\sigma}^2_{Tot} = \frac{QS_{Tot}}{df_{tot}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(x_{ikj} - \overline{G}\right)^2}{n \cdot p \cdot q - 1}$$

$$\hat{\sigma}^2_{TreatA} = \frac{QS_{TreatA}}{df_{TreatA}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(\overline{A}_j - \overline{G}\right)^2}{p - 1}$$

$$\hat{\sigma}^2_{TreatB} = \frac{QS_{TreatB}}{df_{TreatB}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(\overline{B}_k - \overline{G}\right)^2}{q - 1}$$

Varianzanalyse

Zweifaktorielle ANOVA

- Damit werden die Populationsvarianzen berechnet als

$$\hat{\sigma}^2_{A\times B} = \frac{QS_{A\times B}}{df_{A\times B}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(\overline{A_jB_k} - \overline{A_jB_k}'\right)^2}{(p-1)\cdot(q-1)}$$

$$\hat{\sigma}^2_{Fehler} = \frac{QS_{Fehler}}{df_{Fehler}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(x_{ikj} - \overline{A_jB_k}\right)^2}{p\cdot q\cdot(n-1)}$$

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Mit den Populationsvarianzen stimmt die zuvor angenommene Beziehung
- Ohne Effekt eines Treatments kann die Streuung der Stufen-mittelwerte nur aus der Fehlerstreuung entstehen.

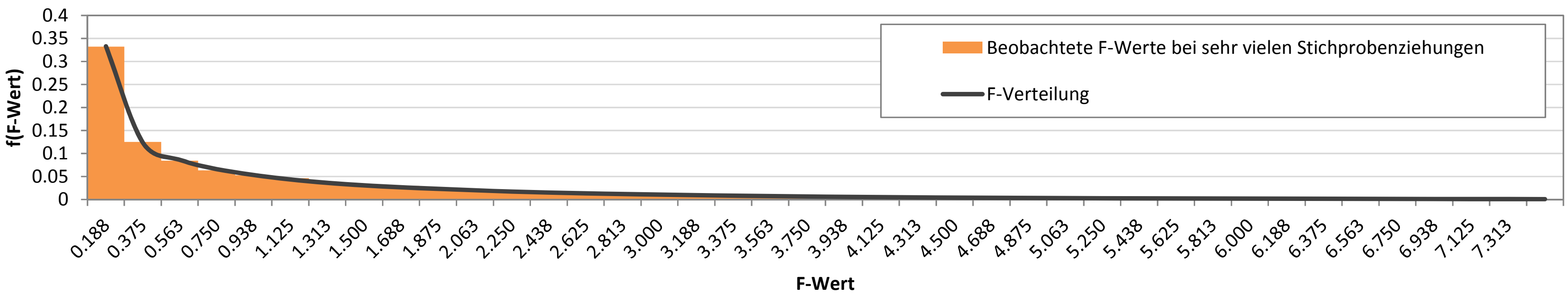
$$\boxed{\hat{\sigma}^2_{Treat} \triangleq \hat{\sigma}^2_{Fehler} \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{\sigma}^2_{Treat}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler}} \approx 1}$$

- Daraus konstruiert man die **Prüfgröße**

$$\boxed{F = \frac{\hat{\sigma}^2_{Treat}}{\hat{\sigma}^2_{Fehler}}}$$

- Sie ist **F-verteilt** mit $df_{Treat} = p-1$ Zählerfreiheitsgraden und $df_{Fehler} = p \cdot (n-1)$ Nennerfreiheitsgraden.
- Aus der F-Verteilung kann die **Wahrscheinlichkeit** $p(F)$ für das Auftreten dieser Prüfgröße ermittelt werden

- **Grundfrage:** Ist die Streuung der Mittelwerte zwischen Treatmentstufen hoch genug, damit statistisch behauptet werden kann, das sie nicht mehr auf zufälligen Unterschieden aufgrund der Stichprobenziehung beruhen kann?
- Dazu muss bekannt sein, in welchem Bereich die Streuung der Mittelwerte zwischen Treatmentstufen **typischerweise** läge, wenn in Wahrheit keine Treatmentwirkung besteht.
- Die Statistik beantwortet dies „typischerweise" mithilfe einer **Prüfgröße**.
- Aus Treatment- und Fehlerstreuung wird eine solche **Prüfgröße F** errechnet, deren zufällige Schwankungen bekannt sind, weil sie der **F-Verteilung** folgen.
- Ein zu unwahrscheinlicher F-Wert belegt Unterschiede zwischen Treatmentstufen



Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Man berechnet also zunächst die **Prüfgröße** F
- Die F-Verteilung gibt nun an, welche **Wahrscheinlichkeit** $p(F)$ das Auftreten der Prüfgröße hat unter der Annahme, dass Treatmentvarianz und Fehlervarianz gleich sind.
- Ist diese Wahrscheinlichkeit **zu klein**, so muss es Einflüsse auf die Treatmentstreuung geben, die nicht auf die Fehlerstreuung zurückzuführen sind.
- Diese Einflüsse können nur durch das Treatment hervorgerufen werden, es hat also eine Wirkung.
- Das bedeutet gleichzeitig, dass die Mittelwerte der Treatmentstufen systematisch unterschiedlich sind (dieser Unterschied erzeugt gerade die Treatmentstreuung).

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Ist die berechnete Wahrscheinlichkeit $p(F)$ also zu klein, gibt es Unterschiede in den Stufenmittelwerten.
- **Problem**: Wie klein ist „zu unwahrscheinlich"?
- Es gibt hier Konventionen, die so genannten **Signifikanzniveaus**:

$$\begin{array}{ll} \alpha \geq 0.05 & \rightarrow \text{ statistisch nicht signifikant} \\ \alpha < 0.05 & \rightarrow \text{ statistisch signifikant} \\ \alpha < 0.01 & \rightarrow \text{ statistisch hochsignifikant} \end{array}$$

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

Beobachtung im Experiment: $\hat{\sigma}^2{}_{Treat}$ und $\hat{\sigma}^2{}_{Fehler}$

Frage: Sind die Varianzen in Wahrheit gleich?
Geht die Streuung der Mittelwerte der Treatmentstufen nur auf die Fehlerstreuung zurück?

(1) Festlegung eines Signifikanzniveaus α

↓

(2) Berechnung der Prüfgröße für jeden Faktor: $F_A, F_B, F_{A\times B}$
deren Häufigkeitsverteilung theoretisch bekannt ist (F-Verteilung)

↓

(3) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für diese Prüfgröße: $p(F_A)$, $p(F_B)$, $p(F_{A\times B})$

↓

(4) Rückschluss: $p(F) = p\left(\hat{\sigma}^2_{Treat} \approx \hat{\sigma}^2_{Fehler}\right)$

↓

(5) Vergleich von p mit α und Treffen der Signifikanzaussage

Aber: Bei dieser Aussage irrt man sich mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha \cdot 100\%$

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Man erstellt folgende Ergebnistabelle

Faktor	QS	df	Var	F	p
A	399.410	3	133.137	16.456	0.000
B	27.503	1	27.503	3.400	0.070
A×B	2157.628	3	719.209	88.898	0.000
Fehler	517.778	64	8.090		
Total	3102.319	71	43.695		

- Zusätzlich ist zu empfehlen, die Varianzaufklärung der Treatments zu bestimmen.

- Diese bezeichnet den Anteil an der Gesamtstreuung, für den das Treatment verantwortlich ist.

Varianzanalyse

Ein- / Mehrfaktorielle ANOVA (ANalysis Of VAriance)

- Die Varianzaufklärung in der ANOVA wird als η^2 (eta²) bezeichnet und prinzipiell berechnet als:

$$\boxed{\eta^2_{Treat} = \frac{QS_{Treat}}{QS_{Tot}}}$$

mit $QS_{Treat} = QS_A$ oder QS_B oder $QS_{A\times B}$

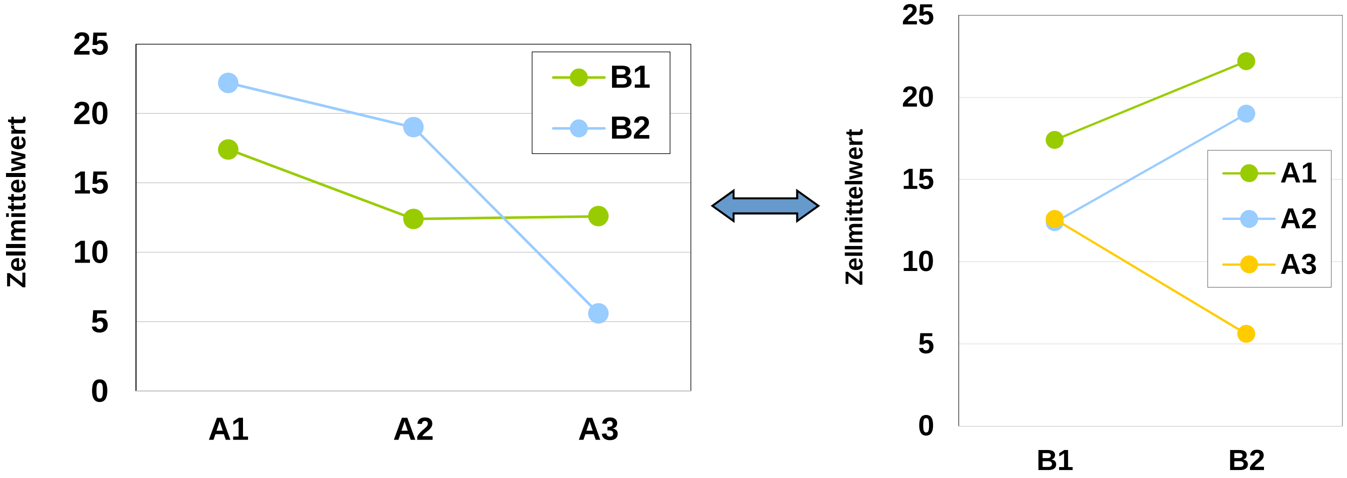
- Ebenso ist die nicht aufgeklärte Varianz zu bestimmen als der Anteil der verbleibenden Fehlerstreuung an der Gesamtstreuung, also:

$$\boxed{\eta^2_{Fehler} = \frac{QS_{Fehler}}{QS_{Tot}}}$$

Varianzanalyse

Zweifaktorielle ANOVA – Interaktionsplots

- Zur Veranschaulichung der Effekte bei der mehrfaktoriellen ANOVA werden **Interaktionsplots** verwendet.
- Sie enthalten die Informationen der Zellmittelwerte für zwei Faktoren
- Für solche Plots existieren immer zwei mögliche Darstellungen



Streuungs-vergleich

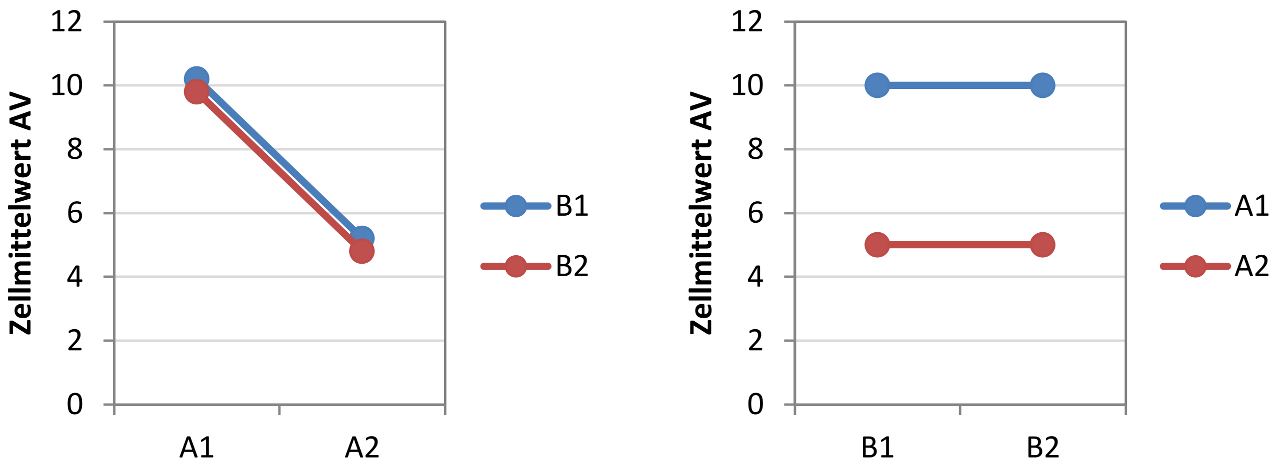
QS-Zerlegung

Prüfgröße & Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Zweifaktorielle ANOVA – typische Effekte



- Effekt auf Faktor A, kein Effekt auf Faktor B, keine Interaktion zwischen A und B.

Streuungs-
vergleich

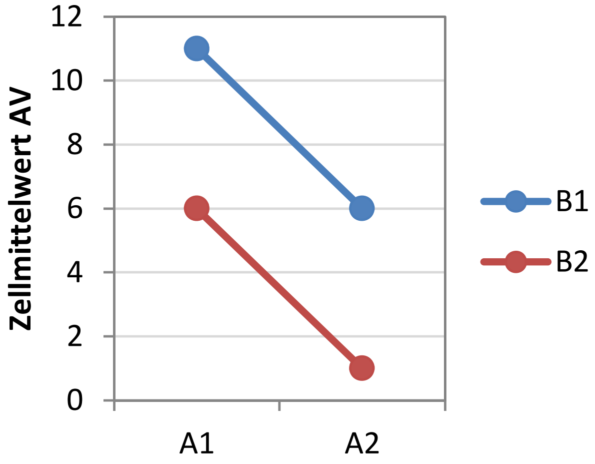
QS-Zerlegung

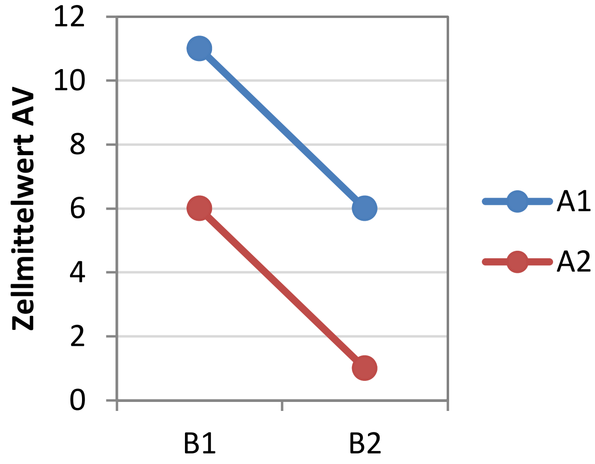
Prüfgröße &
Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Zweifaktorielle ANOVA – typische Effekte

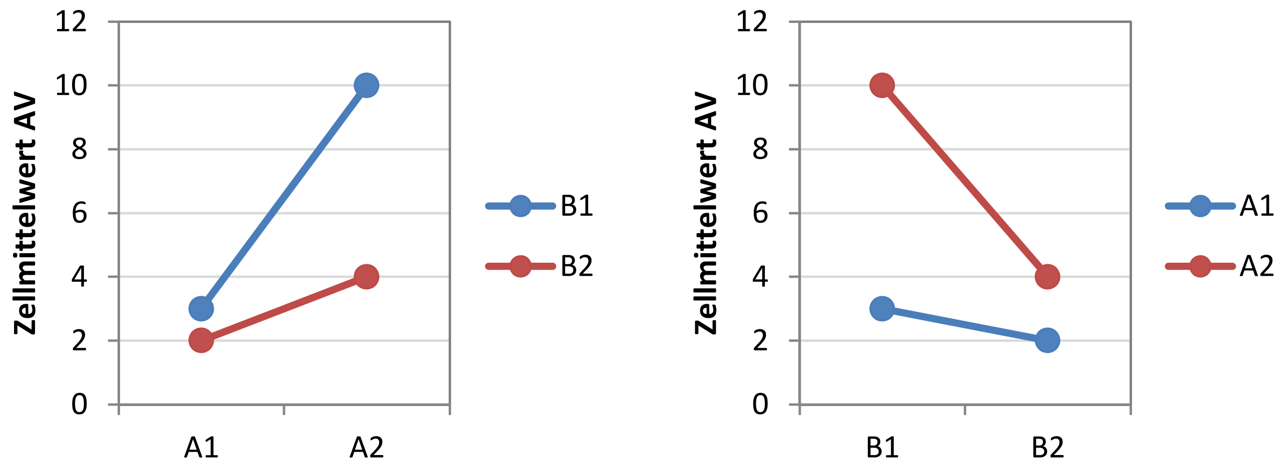




- Effekt auf Faktor A, Effekt auf Faktor B, keine Interaktion zwischen A und B.

Varianzanalyse

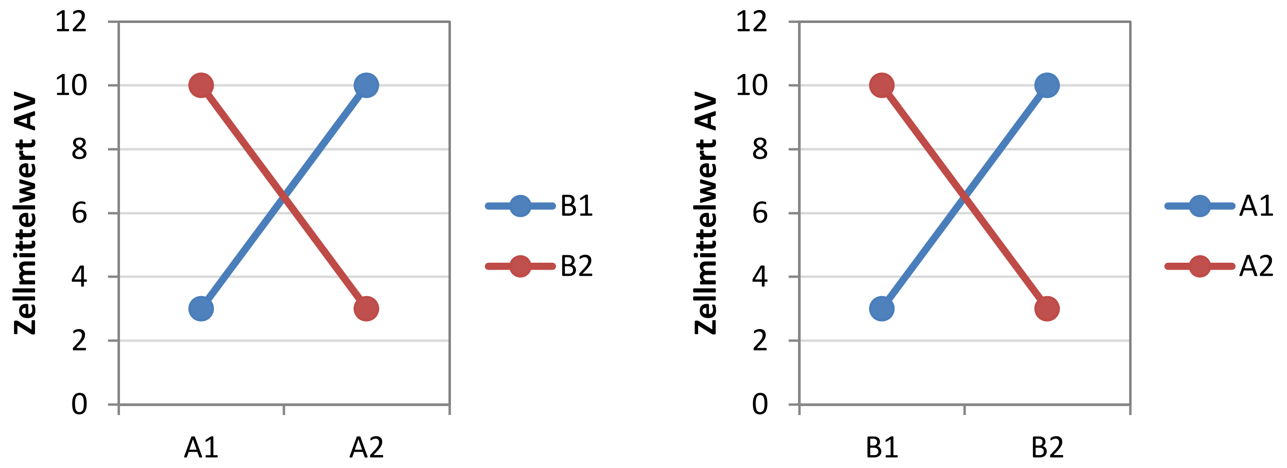
Zweifaktorielle ANOVA – typische Effekte



- Effekt auf Faktor A, Effekt auf Faktor B, Interaktion zwischen A und B ► **ordinal**, da sich die Geraden auch im Gegenplot nicht schneiden.

Varianzanalyse

Zweifaktorielle ANOVA – typische Effekte



- Kein Effekt auf Faktor A, kein Effekt auf Faktor B, Interaktion zwischen A und B ► **disordinal**, da sich die Geraden auch im Gegenplot schneiden.

Streuungs-
vergleich

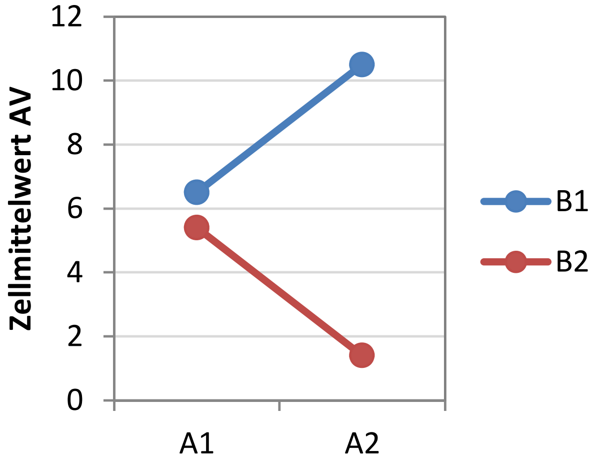
QS-Zerlegung

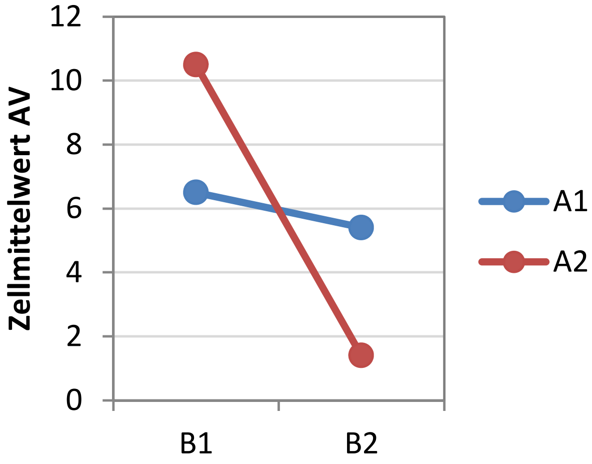
Prüfgröße &
Ergebnistab.

Plots

Varianzanalyse

Zweifaktorielle ANOVA – typische Effekte





- Kein Effekt auf Faktor A, großer Effekt auf Faktor B, Interaktion ► **hybrid**, da sich die Geraden im Gegenplot schneiden.

JOHANNES GUTENBERG UNIVERSITÄT MAINZ